

Секция «Математика и механика»

Стохастические версии неравенств Пуанкаре и логарифмического Соболева

Абакирова Айгуль Тилековна

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,

Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: abakirova@gmail.com

Пусть  $\xi = \xi(w)$  – стандартная нормальная случайная величина,  $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , функция  $f \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{P}_\xi)$ . Известное неравенство Пуанкаре – Чернова утверждает, что  $Df(\xi) \leq \mathbf{E}(f'(\xi))^2$ .

Предположим, что  $f \in C^1(\mathbb{R})$ ,  $f, f' \in L^2(\mathbb{P}_\xi)$ . Тогда из логарифмического неравенства Соболева, доказанного Гроссом, следует, что  $f \in L^2 \log L(\mathbb{P}_\xi)$  и энтропия  $\text{Ent} f^2(\xi) := \mathbf{E} f^2(\xi) \log f^2(\xi) - \mathbf{E} f^2(\xi) \log \mathbf{E} f^2(\xi) \leq 2 \mathbf{E}(f'(\xi))^2$ .

Различные доказательства классических неравенств можно найти в [2]. Продуктивной оказывается идея рассматривать  $\xi$  как маргинальное значение броуновского движения  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  и использовать методы стохастического исчисления ([1]). Итак, для стандартного броуновского движения верно  $Df(B_T) \leq T \mathbf{E}(f'(B_T))^2$  и  $\text{Ent} f^2(B_T) \leq 2T \mathbf{E}(f'(B_T))^2$ .

Рассмотрим косоое броуновское движение  $X = B^\alpha = (B_t^\alpha)_{t \geq 0}$  с параметром  $\alpha \in [0, 1]$ , оно получается из броуновского движения, если независимо поменять знак каждой экскурсии из нуля, так чтобы она была положительной с вероятностью  $\alpha$ . Косоое броуновское движение – единственное сильное решение уравнения  $X_t = B_t + (2\alpha - 1)L_t^0(X)$ , здесь  $L_t^x(X)$  – локальное время процесса в точке  $x$  ([3]).

Мы получим версии неравенств Пуанкаре и логарифмического Соболева для косоого броуновского движения.

**Теорема.** Пусть функция  $f \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{P}_\xi)$ . Тогда

$$Df(X_T) \leq \mathbf{E}(\gamma f_1^2(X_T) + (T - \gamma) f_2^2(X_T)),$$

где  $\gamma = \int_0^\infty L_T^x dx$  (другими словами,  $\gamma = \int_0^T I_{\{X_t \geq 0\}} dt$  – время, проведенное процессом на положительной полуплоскости),  $0 \leq \gamma \leq T$ ,  $f_1(x) = f'(x) - \frac{2\alpha-1}{1-\alpha} f'(-x) I_{\{x < 0\}}$ ,  $f_2(x) = f'(x) + \frac{2\alpha-1}{\alpha} f'(-x) I_{\{x > 0\}}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ .

В свою очередь

$$\text{Ent} f^2(X_T) \leq 2\mathbf{E}(\gamma g_1^2(X_T) + (T - \gamma) g_2^2(X_T)),$$

где  $g_1(x) = f'(x) - \frac{2\alpha-1}{1-\alpha} f'(-x) \frac{f(-x)}{f(x)} I_{\{x < 0\}}$ ,  $g_2(x) = f'(x) + \frac{2\alpha-1}{\alpha} f'(-x) \frac{f(-x)}{f(x)} I_{\{x > 0\}}$ .

Для  $\alpha = 0, \frac{1}{2}$  и 1 неравенства принимают классический вид.

Результат получен с помощью мартингального метода, техники для обобщенных диффузий ([4]), версии формулы Ито-Танака ([5]).

Литература

1. А. Н. Ширяев, Доказательство неравенства Пуанкаре–Чернова и логарифмического неравенства Соболева методами стохастического исчисления для броуновского движения, *УМН*, **61:3** (2006), 177–178.

2. C. Ané, S. Blachère, D. Chafaï, P. Fougères, I. Gentil, F. Malrieu, C. Roberto and G. Scheffer (2000). Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques. *Panor. Synthèses* **10**.
3. J. M. Harrison, L. A. Shepp (1981). On skew Brownian motion. *Ann. Probab.* **9**:2, 309–313.
4. A. Lejay (2006). On the constructions of the skew Brownian motion. *Probab. Surveys* **3**, 413–466.
5. G. Peskir, A.N. Shiryaev (2006). Optimal stopping and free boundary problems. Birkhäuser, Basel.