

Секция «Математика и механика»

Об аналоге неравенства Буркхолдера-Ганди-Дэвиса для фрактального броуновского движения

Муравлёв Алексей Анатольевич

Аспирант

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Отдел теории вероятностей и математической статистики, Москва, Россия

E-mail: almurav@gmail.com

Пусть на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  задано фрактальное броуновское движение  $B^H = (B_t^H)_{t \geq 0}$  с параметром Харста  $H \in (0, 1)$ , т.е. определён выходящий из нуля гауссовский процесс с нулевым средним и ковариационной функцией

$$R(s, t) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}), \quad s, t \geq 0.$$

При  $H = 1/2$  процесс  $B^H$  является стандартным броуновским движением  $B$ . Однако, при  $H \neq 1/2$  процесс  $B^H$  не является ни семимартингалом, ни марковским процессом.

Классические неравенства Буркхолдера-Ганди-Дэвиса для стандартного броуновского движения  $B$  утверждают, что для любого момента остановки  $\tau$  относительно естественной фильтрации  $B$  и  $p > 0$  справедливо

$$c(p)E\tau^{p/2} \leq E \max_{s \leq \tau} |B_s|^p \leq C(p)E\tau^{p/2}, \quad (1)$$

где  $c(p)$  и  $C(p)$  – некоторые универсальные константы.

В работе [1] А.Новиков и Э.Валкейла с помощью мартингалов преобразований доказали аналоги неравенств (1) для фрактального броуновского движения  $B^H$ :

$$c(p, H)E\tau^{pH} \leq E \max_{s \leq \tau} |B_s^H|^p \leq C(p, H)E\tau^{pH}, \quad H \in (1/2, 1),$$

$$c(p, H)E\tau^{pH} \leq E \max_{s \leq \tau} |B_s^H|^p, \quad H \in (0, 1/2),$$

где  $c(p, H)$  и  $C(p, H)$  – некоторые универсальные константы.

Основной результат состоит в получении недостающей верхней оценки:

$$E \max_{s \leq \tau} |B_s^H|^p \leq C(p, H)E\tau^{pH}, \quad H \in (0, 1/2).$$

В основе доказательства лежит сведение исходной задачи к получению максимальных неравенств для семейства одномерных марковских процессов  $X^{\alpha, \beta} = (X_t^{\alpha, \beta})_{t \geq 0}$ , где

$$X_t^{\alpha, \beta} = t^\alpha \int_0^t s^{-\alpha} e^{-\beta(t-s)} dB_s,$$

$\alpha < 1/2$ ,  $\beta > 0$ , являются решениями стохастических дифференциальных уравнений:

$$dX_t^{\alpha, \beta} = dB_t - (\beta - \alpha/t)X_t^{\alpha, \beta} dt, \quad X_0^{\alpha, \beta} = 0.$$

Литература

1. Novikov A., Valkeila E., On some maximal inequalities for fractional Brownian motions. Preprint 186, University of Helsinki (1998)