Секция «Математика и механика»

Качество аппроксимации средними Фурье в терминах обобщенных модулей гладкости

Артамонов Сергей Юрьевич
Аспирант
Филиал МГУ имени М.В.Ломоносова в г. Севастополе, Факультет компьютерной математики, Севастополь, Украина
E-mail: sergei.artamonov@gmail.com

В шкале пространств L_p, $1 \le p \le +\infty$, 2π-периодических функций рассматриваются следующие конструкции. Средние Фурье, порожденные генератором $\varphi(\cdot)$: $\mathcal{F}_\sigma^{(\varphi)}(f;x) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{T}} f(h)\, W_\sigma(\varphi)(x-h)\, dh$; обобщенные K-функционалы, порожденные генератором $\psi(\cdot)$: $K_\psi(f,\delta)_p = \inf\limits_{g \in X_p(\psi)} \{ \| f - g \|_p + \delta^\alpha \| \mathcal{D}(\psi) g \|_p \}$; обобщенные модули гладкости, порожденные генератором $\theta(\cdot)$: $\omega_\theta(f,\delta)_p = \sup\limits_{0 \le h \le \delta} \left\| \sum\limits_{\nu \in \mathbb{Z}} \theta^\wedge(\nu) f(x + \nu h) \right\|_p$.
В работах [1,2] получена цепочка эквивалентностей между аппроксимационной ошибкой средних Фурье, обобщенными K-функционалами и обобщенными модулями гладкости при условии эквивалентности их генераторов. Более точно, справедлива следующая
Теорема 1. Пусть $1 \le p \le +\infty$, $\varphi(\xi) \ne 1$ при $\xi \ne 0$, $\mathcal{F}[\varphi] \in L_1(\mathbb{R})$, $\psi \in \mathcal{H}_\alpha$, (η,τ)– плоское разбиение единицы. Если $1 - \varphi(\cdot) \overset{(\eta)}{\asymp} \psi(\cdot) \overset{(\eta)}{\asymp} \theta(\cdot)$, $\exists\, m \in \mathbb{N}:\ (\varphi(\cdot))^m \overset{(\tau)}{\asymp} 1 - \varphi(\cdot)$, тогда

$$\| f - \mathcal{F}_\sigma^\varphi(f) \|_p \asymp K_\psi\left(f,(\sigma+1)^{-1}\right)_p \asymp \omega_\theta\left(f,(\sigma+1)^{-1}\right)_p, \qquad (1)$$

где функции $\varphi(\cdot)$, имеющая компактный носитель, $\psi(\cdot)$, однородная функция, $\theta(\cdot)$, 2π-периодическая функция, удовлетворяют ряду дополнительных условий.
Вместе с тем, так как $\psi(\cdot)$ – однородная функция, то $\psi(\cdot)$ задает степенной порядок роста для $\varphi(\cdot)$ и $\theta(\cdot)$ в силу эквивалентностей генераторов.
В данной работе, исключая из цепочки эквивалентностей (1) K-функционал, мы получаем эквивалентность между аппроксимационой ошибкой средних Фурье и обобщенными модулями гладкости для более широкого класса функций $\varphi(\cdot)$ и $\theta(\cdot)$. Основным результатом работы является
Теорема 2. Пусть $1 \le p \le +\infty$, $\varphi(\xi) \ne 1$ при $\xi \ne 0$, $\mathcal{F}[\varphi] \in L_1(\mathbb{R})$,, (η,τ)– плоское разбиение единицы. Если $1-\varphi(\cdot) \overset{(\eta)}{\asymp} \theta(\cdot)$, $\exists\, m \in \mathbb{N}:\ (\varphi(\cdot))^m \overset{(\tau)}{\asymp} 1-\varphi(\cdot)$, $\exists\, k \in \mathbb{N}:\ (i\xi)^k \overset{(\eta)}{\prec} \theta(\xi)$, $\theta(\cdot) \overset{(\tau)}{\asymp} 1$, тогда

$$\| f - \mathcal{F}_\sigma^\varphi(f) \|_p \asymp \omega_\theta\left(f,(\sigma+1)^{-1}\right)_p, \qquad (2)$$

Литература

1. V. Rukasov, K. Runovski, H.-J. Schmeisser: *Approximation by families of linear trigonometric polynomial operators and smoothness properties of functions.* Mathematische Nachrichten Volume 284, Issue 11-12, pages 1523-1537, August 2011.

2. K. Runovski, H.-J. Schmeisser: *General Module of Smoothness and Approximation by Fourier Means* (to appear)