Секция «Математика и механика»

Об уравнении Колмогорова-Фоккера-Планка с потенциалом

Манита Оксана Анатольевна
Студент
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: oxana.manita@gmail.com

Ряд моделей статистической физики, например модель намагничивания Кавасаки, приводит к уравнениям на пространстве конечных мер на $\mathbb{R}^d$ вида

$$\partial_t \mu_t = \partial_{x^i x^j} \left(a^{ij} \mu_t\right) - \partial_{x^i} \left(b^i \mu_t\right) + q\mu_t$$

с отрицательным потенциалом q. Здесь и далее подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

Традиционно большой интерес (см., например, [5] или обзор [1]) прикован к уравнениям Колмогорова-Фоккера-Планка без потенциала, которые имеют следующий вид:

$$\partial_t \mu_t = \partial_{x^i x^j} \left(a^{ij} \mu_t\right) - \partial_{x^i} \left(b^i \mu_t\right).$$

С одной стороны, эти уравнения соответствуют обратным уравнениям Колмогорова для классических диффузионных процессов. С другой стороны, решение уравнения такого вида сохраняет полную меру пространства, поэтому естественное пространство для рассмотрения таких уравнений — пространство вероятностных мер $\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$.
Решения уравнений с потенциалом, рассматриваемых в этом докладе, не обладают свойством сохранения полной меры пространства, поэтому необходимо указать класс, отличный от $\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$, мер, в котором естественно их решать. Таким классом оказывается класс субвероятностных мер, т.е. таких борелевских неотрицательных мер σ на $\mathbb{R}^d$, что $\sigma\left(\mathbb{R}^d\right) \leq 1$.

В докладе рассматривается задача Коши для линейного уравнения вида

$$\partial_t \mu_t = \partial_{x^i x^j} \left(a^{ij}(x,t) \mu_t\right) - \partial_{x^i} \left(b^i(x,t) \mu_t\right) + q(x,t)\mu_t, \quad \mu\Big|_{t=0} = \mu_0.$$

и исследуются решения μ, заданные семейством неотрицательных мер μ_t, такие, что

$$\mu_t(\mathbb{R}^d) \leq \nu(\mathbb{R}^d) + \int_0^t \int q(x,s)\, d\mu_s\, ds.$$

Оказывается, что это не техническое условие, а естественное обобщение вероятностного решения.

Особый интерес вызывают уравнения с вырожденной матрицей главной части, так как решения таких уравнений могут терять плотность относительно меры Лебега даже в случае уравнения с гладкими коэффициентами и начальном значении с плотностью. Разрешимость задачи Коши для подобных уравнений исследуется в [2,4], о существовании решений с плотностью в частных случаях см. [6], вопросу исчезновения плотности посвящена, в частности, работа [3].

В докладе приводятся достаточные условия существования решений при слабых ограничениях на коэффициенты уравнения, а также обсуждаются некоторые вопросы, связанные с существованием решений с плотностью у вырожденных уравнений.

Литература

1. Богачев В.И., Крылов Н.В., Рёкнер М. Эллиптические и параболические уравнения для мер // Успехи математических наук, 2009, т. 64, вып. 6 (390), стр.5-116

2. Bogachev V.I., Krylov N.V., Roeckner M. On regularity of transition functions and invariant measures of singular diffusions under minimal conditions // Comm. PDE , 2001, v. 26, p. 2037-2080.

3. Carrillo J.A., Di Francesco M., Figalli A., Laurent T., Slepcev D. Global in time measure-valued solutions and finite-time aggregation for nonlocal interaction equations // Duke Math. J.,2011, vol. 156, no. 2, p. 229-271.

4. DiPerna R.J., Lions P.-L. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces // Invent. math., 1989, v. 98, p. 511-547.

5. Jordan R., Kinderlehrer D., Otto F. The variational formulation of the Fokker-Planck equation // SIAM J. Math. Anal., 1998, vol. 29, no.1, p. 1-17.

6. Le Bris C., Lions P.-L. Existence and uniqueness of solutions to Fokker-Planck type equations with irregular coefficients //Comm. PDE, 2008, v. 33, p. 1272-1317.

Слова благодарности

Автор выражает признательность д.ф-м.н. Богачеву В.И. и Шапошникову С.В. за плодотворные обсуждения и ценные замечания.