Секция «Математика и механика»

О СПЕКТРЕ ДВУХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С ТОЧЕЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ В ДВУХМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Мейлиев Аброр Хужаназарович

Студент

Самаркандский государственный университет, Механико-математический факультет, Самарканд, Узбекистан

E-mail: rxx05@mail.ru

Аннотация. В настоящей статье, следуя в основном схеме использованной в работах [1-3], мы изучим задачу о точечном взаимодействии двух произвольных частиц. Доказано, что расширение Скорнякова-Тер-Мартиросяна оператора Лапласа, определенного на области функций двух переменных $x_1, x_2 \in R^2$, обращающихся в нуль при совпадении переменных, т.е. при $x_1 = x_2$, является самосопряженным. Доказано, что существенный спектр рассматриваемого расширения совпадает с полуосью $[0, \infty)$ и при любом значения $\varepsilon, \varepsilon \in (-\infty; +\infty)$, оно имеет одно отрицательное собственное значение. Основные результаты работы основываются на изучение спектра расширения оператора h_ε, зависящего от параметра расширения ε.

Гамильтониан (оператор энергии) рассматриваемой двухчастичной системы задается как некоторое расширение $\tilde{H}$ следующего симметрического оператора $\tilde{H}_0$, действующего в гильбертовом пространстве $L_2((R^2)^2) \equiv L_2$ по формуле

$$\tilde{H}_0 = \left(-\frac{1}{2m_1}\Delta_{x_1} - \frac{1}{2m_2}\Delta_{x_2}\right)\varphi\left(x_1, x_2\right)$$

и определенного на множестве функций

$$D(\tilde{H}_0) = \{\varphi \in L_2 : (\Delta_{x_1} + \Delta_{x_2})\varphi \in L_2, \varphi(x, x) = 0\}$$

где Δ_{E_i}-оператор Лапласа по переменной $x_i \in R^2$, m_i-масса i-й частицы, $i = 1, 2$. После соответствующего преобразования Фурье оператор $\tilde{H}$ перейдет в оператор

$$H_0 f(p_1, p_2) = (\frac{1}{2m_1}p_1^2 + \frac{1}{2m_2}p_2^2) f(p_1, p_2),$$

определенный на множестве $D(H_0) \subset L_2$ функций $f(p_1, p_2)$, удовлетворяющих условиям:

$$\int_{(R^2)^2} (p_1^4 + p_2^4) \left|f(p_1, p_2)\right|^2 dp_1 dp_2 < \infty,$$

$$\int_{\Gamma_{\mathrm{p}}} f(p_1, p_2) d\nu_p = 0,$$

где обозначение $p^2, p \in R^2$ означает $p^2 = \left(p^{(1)}\right)^2 + \left(p^{(2)}\right)^2$.

Здесь $\Gamma_{\mathrm{p}} = \{(p_1, p_2) \in (R^2)^2 : p_1 + p_2 = p, p \in R^2\}$- семейство трехмерных многообразий с естественной Лебеговой мерой $d\nu_p$. В дальнейшем интеграл без указания пределов понимается как интегрирование по всему пространству R^2.

Лемма 1. *Для любого* $z \in \Pi_0 = C^1 \backslash [0, \infty)$ *дефектное подпространство* $\Re_z \subset L_2(R^2)$

оператора h_0 состоит из функций вида $u(p) = \frac{c}{p^2-\bar{z}}, c \in C^1$.
Лемма 2. *Область определения $D(h_0^*)$ оператора h_0^* состоит из функций вида*

$$g(p) = f(p) + \frac{c_1}{p^2+1} + \frac{c_2}{(p^2+1)^2}, \tag{1}$$

где $f \in D(h_0)$, $c_1, c_2 \in C^1$. Оператор h_0^* действует на функцию g вида (1) по формуле $h_0^* g(p) = p^2 g(p) - c_1$, где c_1- константа взятая из разложении (1) функции g.
Теперь выберем расширение оператора h_0. Для любого $\varepsilon \in R$ ставим в соответствие множество $D(h_\varepsilon), D(h_0) \subset D(h_\varepsilon) \subset D(h_0^*)$, следующим образом:

$$D(h_\varepsilon) = \left\{ g \in D(h_0^*) : g(p) = f(p) + \frac{c}{p^2+1} + \frac{(\varepsilon-1)c}{(p^2+1)^2}, f \in D(h_0) \right\}$$

Сужение оператора h_0^* на область $D(h_\varepsilon)$ обозначим через h_ε. По определению h_ε является расширением оператора h_0.
Тереома 1. *Для любого $\varepsilon \in R$ расширение h_ε является самосопряженным оператором.*
Основным результатом этой работы является следующая теорема.
Теорема 2. *Для любого $\varepsilon \in R$ существенный спектр оператора h_ε совпадает с полуосъю $[0, \infty)$. При любом значение ε, h_ε имеет одно простое собственное значение $z = -\frac{1}{e^\varepsilon}$, соответствующая собственная функция с точностъю до постоянного множителя имеет вид*

$$g_\varepsilon(p) = \frac{1}{p^2 + \frac{1}{e^\varepsilon}}$$

.

Литература

1. Р.А. Минлос, Л.Д. Фаддеев. ДАН СССР // 1961,Т.141, №6,с.1335-1338.
2. Р.А. Минлос, Л.Д. Фаддеев. ЖЭТФ // 1961.Т.41. №12. с. 1850-1851.
3. Р.А. Минлос, М.Х. Шерматов. Вестник МГУ // сер.1, 1989, №6, с.7-14.