

О ВЛИЯНИИ НЕЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО ДВИЖЕНИЯ НА ТРАЕКТОРИИ ЖИДКИХ ЧАСТИЦ НА ГРАНИЦЕ ДВИЖУЩИХСЯ СРЕД

Очиров Артем Александрович

Аспирант

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

E-mail: otchirov@mail.ru

1. Введение.

Широко известно, что при распространении капиллярно-гравитационного волнового движения по свободной поверхности жидкости ее частички совершают колебательные движения совместно с небольшим дрейфовым движением в сторону распространения волны [1]. При этом траектории движения жидких частиц даже в простейшем случае идеальной жидкости описываются на качественном уровне. Если рассмотреть границу раздела двух несмешивающихся жидкостей, движущихся друг относительно друга с постоянной скоростью, то движение частиц их составляющих заметно усложняется. В настоящей работе исследуется влияние нелинейного волнового движения и относительной скорости движения жидкостей на особенности траекторий частиц жидкости. Решение строится во втором приближении по амплитуде волны.

2. Математическая формулировка задачи.

Рассматриваются две несжимаемые идеальные жидкости с плотностями ρ^w и $\rho^a < \rho^w$ ($\rho^a \rho^w = \rho$), соответственно занимающие полупространства θ в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$, в которой ось Oz направлена вертикально вверх против направления действия сил тяжести \mathbf{g} . А плоскость Oxy совпадает с равновесной границей раздела, по которой в положительном направлении оси Ox распространяется бегущая капиллярно-гравитационная волна с амплитудой A и волновым числом k , вызывая отклонение $\xi = \xi(z, x, t)$ границы раздела от равновесного положения. Считается при этом, что верхняя жидкость движется поступательно с постоянной скоростью U_0 . Математическая формулировка задачи в этом случае выглядит следующим образом [2]:

$$\begin{aligned} z > \xi: \quad \Delta \varphi^a = 0; \quad P^a = p_0 - \rho^a g z - \rho^a \frac{\partial \varphi^a}{\partial t} - \frac{\rho^a}{2} \left(\left(\frac{\partial \varphi^a}{\partial x} + U_0 \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi^a}{\partial z} \right)^2 \right); \\ z = \xi: \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^w}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi^w}{\partial z}; \quad P^w - P^a = -\gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \left(1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right)^{-3/2}; \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} + \left(\frac{\partial \varphi^a}{\partial x} + U_0 \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi^a}{\partial z}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} z < \xi: \quad \Delta \varphi^w = 0; \quad P^w = p_0 - \rho^w g z - \rho^w \frac{\partial \varphi^w}{\partial t} - \frac{\rho^w}{2} \left(\left(\frac{\partial \varphi^w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi^w}{\partial z} \right)^2 \right); \\ z \rightarrow \infty: \quad \nabla \varphi^a \rightarrow 0; \quad z \rightarrow -\infty: \quad \nabla \varphi^w \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Здесь $P^{w,a}$ — давление в нижней и верхней жидкостях соответственно, а p_0 — атмосферное давление. Раскладывая задачу по малому параметру, пропорциональному амплитуде волнового движения, выделяя порядки малости и последовательно разрешивая задачу для каждого из них, можно получить решение с необходимой точностью.

3. Решение.

Решением задачи (1) во втором приближении по амплитуде волны является профиль отклонения границы раздела и скорости верхней и нижней жидкостей в Эйлеровом представлении, которое легко находится стандартными методами:

$$\begin{aligned} \xi &= A \cos(kx - \omega t) + A^2 \Theta \cos(2kx - 2\omega t) \\ \varphi^w &= A \frac{\omega}{k} \exp(kz) \sin(kx - \omega t) + A^2 \Xi \exp(2kz) \sin(2kx - 2\omega t) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\varphi^a = -A \frac{\omega^a}{k} \exp(-kz) \sin(kx - \omega^a t) + A^2 \Lambda \exp(-2kz) \sin(2kx - 2\omega^a t)$$

Здесь Θ , Ξ и Λ — константы, явный вид которых не приводится в силу громоздкости, а циклическая частота волнового движения ω связана с волновым числом и другими параметрами задачи дисперсионным уравнением, которое получается при решении задачи первого порядка малости по амплитуде волны:

$$\omega = \frac{kU_0\rho^a + \sqrt{k(-kU_0^2\rho^w\rho^a + k^2\gamma(\rho^w + \rho^a) + g(\rho^w - \rho^a)(\rho^w + \rho^a))}}{(\rho^w + \rho^a)} \quad (3)$$

При расчете поля скоростей для верхней жидкости необходимо перейти в систему отсчета, движущуюся совместно с верхней жидкостью, при этом частота волнового движения изменится вследствие эффекта Доплера:

$$\omega^a = \frac{-kU_0\rho^w + \sqrt{k(-kU_0^2\rho^w\rho^a + k^2\gamma(\rho^w + \rho^a) + g(\rho^w - \rho^a)(\rho^w + \rho^a))}}{(\rho^w + \rho^a)} \quad (4)$$

Для описания траекторий движения выделенных частичек жидкости неудобно пользоваться полученным решением (2): необходимо найти поле скоростей жидкости в представлении Лагранжа. Существует процедура перехода от одной формы записи к другой [3, 4]:

$$\mathbf{U}_L(\mathbf{r}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) + \left(\left(\int_0^t \mathbf{U}(\mathbf{r}, \tau) d\tau \right) \cdot \nabla \right) \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \quad (5)$$

Здесь \mathbf{U}_L — поле скоростей в представлении Лагранжа, а $\mathbf{U} \equiv \mathbf{e}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ — поле скоростей в представлении Эйлера. Выполнив подстановку (2) в (3) и проинтегрировав выражения по времени несложно получить параметрические уравнения кривых, описывающих траектории движения частиц жидкости. Окончательные выражения в настоящей работе не приводятся в силу своей громоздкости. На рис. 1, 2 приведены примеры построения траекторий движения жидких частичек, находящихся вблизи границы раздела нижней и верхней жидкостей соответственно. Построения выполнены в безразмерных переменных $\rho^w = g = \gamma = 1$ для жидкостей вода-воздух при распространении волны с волновым числом $k = \frac{\sqrt{1-\rho}}{4}$, амплитудой в одну десятую длины волны и в отсутствии поступательного движения верхней среды. Из рисунков видно, что жидкие частички движутся по более сложному закону, чем принято считать: во-первых, частички верхней и нижней жидкостей совершают вращательные движения в различных направлениях, во-вторых, на вид кривой, описываемой частицами, сильно влияет нелинейность отклонения профиля границы раздела (для гравитационных волн заметное влияние оказывается на движение частичек верхней жидкости, а для капиллярных волн нелинейность сильнее сказывается на движении частиц, составляющих нижнюю жидкость). Анализ выражений

показывает, что с увеличением поступательной скорости верхней жидкости замедляется вращательное движение частичек и при достижении скорости U_0 значения фазовой скорости распространения волны по границе раздела сред $U^* = \sqrt{(g(\rho^w - \rho^a) + k^2\gamma/k\rho^w)}$ оно полностью прекращается. В этом случае верхняя жидкость движется только поступательно и наблюдатель в движущейся с такой же скоростью системе отсчета не заметит дрейфа верхней жидкости. С дальнейшим увеличением скорости поступательного движения верхней жидкости ее частички снова начинают вращаться, но уже в противоположную сторону, а движущийся наблюдатель заметит дрейф в отрицательном направлении оси Ox . Это проиллюстрировано на рис. 3 построенного при тех же условиях, что и рис. 1 и рис. 2, но $U_0 = 2U^*$.

Таким образом, траектории движения жидких частичек при движении одной среды относительно другой не тривиальны и сильно зависят от скорости относительного движения, распространяющейся нелинейной волны и их сложность может регулироваться общей горизонтальной скоростью движения верхней жидкости, а также амплитудой и длиной волнового движения.

Источники и литература

- 1) Ламб Г. Гидродинамика. М.;-Л.: ОГИЗ. Гостехиздат, 1947. 928 с.
- 2) Д.Ф. Белоножко, С.О. Ширяева, А.И. Григорьев Нелинейные волны на заряженной поверхности жидкости: моногр. / Ярослав. гос. ун-т им. П.Г. Демидова. – Ярославль: ЯрГУ, 2006. – 288с.
- 3) Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане Ч.1. М.: Мир, 1981. 480 с
- 4) Lokenath D. Nonlinear water waves. San Diego. Academic Press. Inc. 1994. 544p.

Иллюстрации

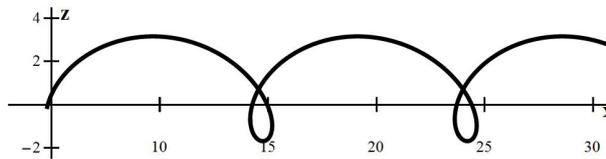


Рис. 1. Траектории движения частиц в нижней жидкости

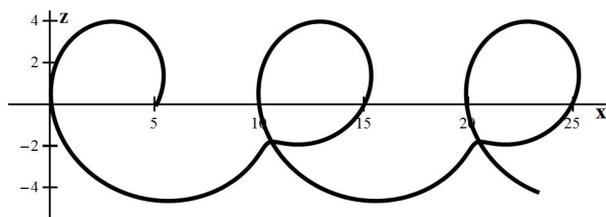


Рис. 2. траектории движения частиц в верхней жидкости $U_0 = 0$

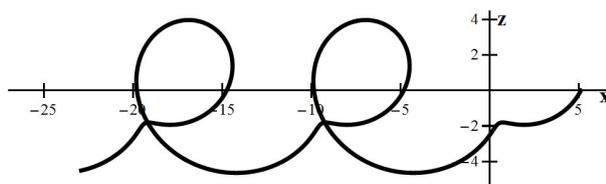


Рис. 3. траектории движения частиц в верхней жидкости $U_0 = 2U^*$