Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Определение условий закрепления и нагруженности одного из концов стержня по собственным частотам его колебаний

Аитбаева Айгуль Азаматовна
Выпускник (магистр)
Башкирский государственный университет, Уфа, Россия
E-mail: phunakoshi@mail.ru

При решении задач диагностики состояния технических систем в прикладных исследованиях важную роль играет определение условий закрепления элементов, деталей конструкций и механизмов. В данной работе рассматривается стержень, как возможный элемент технического устройства, закрепление которого на правом конце неизвестно и не доступно для визуального исследования. Если ударить по доступному участку стержня, появятся изгибные колебания. Возникает вопрос: возможно ли определить вид и параметры закрепления стержня по собственным частотам этих колебаний? Данная проблема связана с некорректными задачами, с задачами отыскания собственных частот различных балок, обратными задачами и сводится к задаче идентификации миноров максимального порядка матрицы краевых условий [1-5].

Здесь, для удобства, изложение метода проводится, когда на другом конце стержня реализуется заделка. Уравнение свободных изгибных колебаний однородного стержня с постоянной жесткостью на изгиб имеет вид [6, с.152]:

$$EI\,\frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial x^4} + \rho\, F\,\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = 0,$$

где $U(x,t)$ — прогиб текущей точки оси стержня, EI — изгибная жесткость стержня, ρ — плотность стержня, F — площадь поперечного сечения стержня. Если левый конец заделан, то краевые условия записываются в виде: $U = 0$, $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$ (при $x = 0$). Основные типы граничных условий на правом конце (при $x = 1$) имеют вид [6, с. 153]:

1) заделка $U = 0$, $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$;

2) свободное опирание $U = 0$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0$;

3) свободный конец $\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} = 0$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0$;

4) плавающая заделка $\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} = 0$, $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$;

5)–9) различные виды упругого закрепления:

5) $EI\,\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + c_1\, U = 0$, $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$;

6) $U = 0$, $EI\,\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + c_2\,\frac{\partial U}{\partial x} = 0$;

7) $EI\,\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + c_1\, U = 0$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0$;

8)$\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} = 0$, $EI\,\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + c_2\,\frac{\partial U}{\partial x} = 0$;

9) $EI\,\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + c_1\, U = 0$, $EI\,\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + c_2\,\frac{\partial U}{\partial x} = 0$;

10) сосредоточенный инерционный элемент на конце
$EI\,\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} = -m\,\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$, $EI\,\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -I_1\,\frac{\partial^3 U}{\partial x\,\partial t^2}$.

В общем виде эти условия можно записать так:

$$\begin{array}{l} a_{11}\,\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + a_{15}\, U + a_{16}\,\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0, \\ a_{22}\,\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + a_{23}\,\frac{\partial U}{\partial x} + a_{24}\,\frac{\partial^3 U}{\partial x\,\partial t^2} = 0 \end{array} \qquad (x = 1). \tag{1}$$

При $t = 0$ должны выполняться начальные условия

$$U(x,0)=f(x),\quad \frac{\partial U}{\partial t}(x,0)=g(x).$$

Обозначим $\rho F\omega^2/(EI)$ через λ^4. Тогда поставленная выше задача о свободных изгибных колебаниях стержня заменой $u(x,t)=y(x)\cos(\omega t)$ сводится (см., например, [7]) к следующей спектральной задаче:

$$y^{(4)}=\lambda^4 y,\quad U_1(y)=y(0)=0,\quad U_2(y)=y'(0)=0,\quad U_3(y)=0,\quad U_4(y)=0, \tag{2}$$

где

$$\begin{array}{l} U_3(y)=a_{11}\,y'''(1)+(a_{15}-a_{16}\,\lambda^4)\;y(1)=0,\\ U_4(y)=a_{22}\,y''(1)+(a_{23}-a_{24}\,\lambda^4)\;y'(1)=0\end{array}\qquad (a_{11},a_{14},a_{22},a_{23}\in\mathbb{R}) \tag{3}$$

— линейные формы, характеризующие закрепление в точке $x=1$ [6]. Поставим к этой спектральной задаче обратную: по собственным частотам изгибных колебаний стержня найти неизвестные краевые условия $U_3(y)=0$, $U_4(y)=0$. Обозначим матрицу, составленную из коэффициентов a_{ij} форм $U_3(y)$ и $U_4(y)$ через A:

$$A=\left\|\begin{array}{cccccc} a_{11} & 0 & 0 & 0 & a_{15} & -a_{16}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & -a_{24} & 0 & 0\end{array}\right\|. \tag{4}$$

Через M_{ij} обозначим миноры второго порядка этой матрицы, составленные из ее i-го j-го столбцов:

$$\begin{array}{l} M_{12}=a_{11}\,a_{22},\quad M_{13}=a_{11}\,a_{23},\quad M_{14}=-a_{11}\,a_{24},\quad M_{15}=0,\quad M_{16}=0,\\ M_{23}=0,\quad M_{24}=0,\quad M_{25}=-a_{15}\,a_{22},\quad M_{26}=a_{16}\,a_{22},\\ M_{34}=0,\quad M_{35}=-a_{15}\,a_{23},\quad M_{36}=0,\\ M_{45}=0,\quad M_{46}=-a_{16}\,a_{24},\qquad M_{56}=0.\end{array} \tag{5}$$

Для основных типов граничных условий на правом конце (при $x=1$), выписанных выше, укажем какие из миноров матрицы A заведомо отличны от нуля:
1) заделка $y(1)=0,\ \ y'(1)=0$: $M_{35}\neq 0$;
2) свободное опирание $y(1)=0,\ \ y''(1)=0$: $M_{25}\neq 0$;
3) свободный конец $y'''(1)=0,\ y''(1)=0$: $M_{12}\neq 0$;
4) плавающая заделка $y'''(1)=0,\ y'(1)=0$: $M_{13}\neq 0$;
5)–9) различные виды упругого закрепления:
5) $y'''(1)+a_{15}\,y(1)=0,\ \ y'(1)=0$: $M_{13}\neq 0,\ \ (M_{35}\neq 0)$;
6) $y(1)=0,\ \ y''(1)+a_{23}\,y'(1)=0$: $M_{25}\neq 0,\ \ (M_{35}\neq 0)$;
7) $y'''(1)+a_{15}\,y(1)=0,\ \ y''(1)=0$: $M_{12}\neq 0,\ \ (M_{25}\neq 0)$;
8) $y'''(1)=0,\ \ y''(1)+a_{23}\,y'(1)=0$: $M_{12}\neq 0,\ \ (M_{13}\neq 0)$;
9) $y'''(1)+a_{15}\,y(1)=0,\ y''(1)+a_{23}\,y'(1)=0$: $M_{12}\neq 0,\ \ (M_{35}\neq 0,\ \ M_{25}\neq 0,\ \ M_{13}\neq 0)$;
10) сосредоточенный инерционный элемент на конце
$y'''(1)-a_{16}\,\lambda^4\,y(1)=0,\ \ y''(1)-a_{24}\,\lambda^4\,y'(1)=0$: $M_{12}\neq 0,\ \ (M_{46}\neq 0,\ \ M_{25}\neq 0,\ \ M_{13}\neq 0)$.
В терминах матрицы A отыскание форм $U_3(y)$, $U_4(y)$ равносильно нахождению матрицы A с точностью до линейных преобразований ее строк. Поэтому поставленная выше обратная задача восстановления краевых условий может быть может быть сформулирована следующим образом: *коэффициенты a_{ij} форм $U_3(y)$ и $U_4(y)$ задачи (2) — неизвестны; ранг матрицы (4) равен двум; миноры $M_{36}=M_{45}=0$; известны отличные от нуля собственные значения λ_k задачи (2); требуется восстановить матрицу (4) с точностью до линейных преобразований строк.*
В настоящей работе установлено, что для однозначного определения условий закрепления и нагруженности одного из концов стержня достаточно использовать три собственных частоты. На основе условий Плюккера, возникающих при восстановлении матрицы краевых

условий, было построено множество корректности задачи и доказана корректность ее по А.Н. Тихонову. Найдено явное решение задачи идентификации матрицы краевых условий, а также приведены соответствующие примеры.

Источники и литература

1) Akhtyamov A.M., Mouftakhov A.V. Identification of boundary conditions using natural frequencies // Inverse Problems in Science and Engineering. Vol~12, No 4, 2004. P. 393-408.
2) Ахтямов А.М. Теория идентификации краевых условий и ее приложения. Москва: Физматлит, 2009.
3) Ахтямов А.М., Ахтямова А.А. Об однозначности идентификации параметров упругого закрепления и сосредоточенного инерционного элемента // Вычислительная механика сплошных сред, Пермь, 2013. Том 6, №1. С. 62-70.
4) Ахтямов А.М., Ахтямова А.А., Муфтахов А.В. Об определении закрепления нагруженности одного из концов стержня по собственным частотам его колебаний // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 3. С. 114-129.
5) Ахтямов А.М., Ахтямова А.А.Об однозначности идентификации сосредоточенного инерционного элемента на одном из концов стержня // Вестник Башкирского университета. 2013. № 1. С. 7-11.
6) Вибрации в технике: Справочник. Т.1. Колебания линейных систем/ Под ред. В.В. Болотина. Москва: Машиностроение, 1978.
7) Коллатц Л. Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). Москва: Наука, 1968.