Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Асимптотическая эквивалентность решений квазилинейных дифференциальных уравнений типа Лейна-Эмдена

Заболоцкий Сергей Александрович

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальных уравнений, Москва, Россия

E-mail: nugget13@mail.ru

При $k>1$, $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $M\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\delta\in\mathbb{R}$ рассматриваются уравнения

$$y''+\frac{a}{x}y'+Mx^{\delta}|y|^{k-1}y=f(x), \tag{1}$$

$$y''+\frac{a}{x}y'+Mx^{\delta}|y|^{k-1}y=0. \tag{2}$$

Предполагается, что функция $f(x)$ непрерывна при $x>x_0>0$.

Результаты, полученные в работах [1, 2, 3, 4] при изучении уравнения

$$y^{(n)}+p(x)|y|^{k-1}y=f(x),\quad n\geq 2,\ k>1,$$

и соответствующего однородного уравнения, позволяют доказать нижеследующие теоремы, обобщающие результаты работ [5, 6].

Теорема 1. *Пусть $a<\min\left\{1,-\frac{\delta}{2}\right\}$ и существует такое $\beta>0$, что $f(x)=O\left(x^{-2-\beta}\right)$ при $x\to+\infty$. Тогда для каждого решения $y(x)$ уравнения (1), стремящегося к нулю при $x\to+\infty$, существует такое единственное решение $\tilde{y}(x)$ уравнения (2), что*

$$|y(x)-\tilde{y}(x)|=O\left(x^{-\beta}\right),\quad x\to+\infty.$$

Теорема 2. *Пусть $M<0$, $\delta>-2$, $a\in\left(-\frac{\delta}{2},1\right)$ и существует такое $\gamma>0$, что $f(x)=O\left(x^{-2a}e^{-\gamma x^{1-a}}\right)$ при $x\to+\infty$. Тогда для каждого решения $y(x)$ уравнения (1), стремящегося к нулю при $x\to+\infty$, существует такое единственное решение $\tilde{y}(x)$ уравнения (2), что*

$$|y(x)-\tilde{y}(x)|=O\left(e^{-\gamma x^{1-a}}\right),\quad x\to+\infty.$$

Теорема 3. *Пусть $\delta=0$ и существует такое $b>0$, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию*

$$\int_{x_0}^{\infty}f^2(x)e^{2bx}dx<\infty.$$

Тогда для каждого решения $y(x)$ уравнения (1), стремящегося вместе с производной к нулю при $x\to+\infty$, существует такое единственное решение $\tilde{y}(x)$ уравнения (2), что

$$|y(x)-\tilde{y}(x)|=O\left(e^{-bx}\right),\ x\to+\infty,\quad \int_{x_0}^{\infty}\left(y(x)-\tilde{y}(x)\right)^2 e^{2bx}dx<\infty.$$

Источники и литература

1) Асташова И.В. Об асимптотическом поведении решений нелинейного неоднородного дифференциального уравнения // В сб.: Тезисы докладов международного семинара «Дифференциальные уравнения и их приложения». Самара. 1995. С.5.
2) Асташова И.В. Об асимптотической эквивалентности нелинейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1996. Т.32. №6. С.855.
3) Асташова И.В. Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа. М.: ЮНИТИ-ДАНА. 2012. С.22-288.
4) Егоров Ю.В., Кондратьев В.А., Олейник О.А. Асимптотическое поведение решений нелинейных эллиптических и параболических систем в цилиндрических областях // Матем. сборник. 1998. Т.189. №3. С.45-68.
5) Заболоцкий С.А. Об асимптотическом поведении решений одного обобщения уравнения Лейна-Эмдена и соответствующего неоднородного уравнения // Дифференц. уравнения. 2012. Т.48. №6. С.895-896.
6) Zabolotskiy S.A. On asymptotic equivalence of solutions to a quasilinear second order differential equations with lower term // Conference on Differential and Difference Equations and Applications. Slovak Republic. Jasna. 2014. Pp.57-58.