Управление портфелем финансовых инструментов при неизвестном стохастическом процессе цен.

Андреев Николай Анатольевич

Аспирант

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: nickolay.a.andreev@gmail.com

Задача стохастического оптимального управления портфелем ставится для заданного случайного процесса динамики параметров рынка на расширенном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P_\omega)$. В данном исследовании рассмотрено обобщение постановки для конечного горизонта и дискретного времени $T = \{t_0, \dots, t_N\}$: пусть заданы множество расширенных вероятностных пространств

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P_\omega^{(i)}), \quad i \in \mathcal{I},$$

множество компактов $\mathcal{K}_n \in \mathbb{R}^l$ и величин $E_n \in \mathcal{K}_n$, $n = \overline{1, N}$; известно, что параметры рынка описываются $\mathcal{F}_t$-адаптированной случайной функцией $\Theta\colon \Omega \times T \to \mathbb{K}$ такой, что

$$\begin{aligned}
&\Theta_{t_n} \in \mathcal{K}_n, \quad n = \overline{1, N},\\
&\mathbb{E}_{P_\omega^{(i)}}^{\mathcal{F}_{t_{n-1}}} \Theta_{t_n} = E_n, \quad i \in \mathcal{I}, \quad n = \overline{1, N}.
\end{aligned}$$

Распределение параметров Θ не задано, но известно, что оно соответствует одной из мер $P_\omega^{(i)}$ и, по определению, является мерой из класса $\mathbb{P}$ с компактным носителем и фиксированным матожиданием. Обозначим совместное распределение Θ в момент t_n как $Q_n^{(i)}$, класс таких мер обозначим $\mathbb{Q}_n$ для всех $n = \overline{1, N}$.

В исследовании рассматривается задача максимизации минимального значения матожидания функции полезности в конечный момент времени, где минимум берется по всем мерам из указанного класса. Похожая задача для одношаговой модели и одной акции без ограничений рассмотрена в [1]. Для рынка m акций и одного безрискового актива, согласно определениям [2], пусть $J(X, H, W^Y)$ — функция полезности, где $X \in \mathbb{R}^m$ — вектор цен акций, $H \in \mathbb{R}^m$ — вектор объемов вложений в акции, W^Y — позиция в безрисковом активе. При заданных начальных условиях для класса допустимых стратегий $\mathcal{A}$ задача имеет вид

$$\inf_{P\in\mathbb{P}} \mathbb{E}_P^{\mathcal{F}_0} J(X_N, H_N^X, W_N^Y) \to \sup_{\mathbf{H}\in\mathcal{A}},$$

где X_n, H_n^X, W_n^Y — цена, объем и позиция в безрисковом активе в момент t_n соответственно, стратегия $\mathbf{H} = \left\{H_n^X\right\}_{n=1}^N$. При некоторых предположениях доказано, что уравнение Беллмана–Айзекса в этом случае имеет вид

$$V_n(X, H^X, W^Y) = \\ = \sup_{\substack{Z\in D_{n+1},\\ H_n^X=H^X, X_n=X,\\ W_n^Y=W^Y}} \inf_{Q_{n+1}\in\mathbb{Q}_{n+1}} \mathbb{E}_{Q_{n+1}}^{\mathcal{F}_n} V_{n+1}(X_{n+1}, Z, W_{n+1}^Y), \quad n < N,$$

$$V_N(X, H^X, W^Y) = J(X, H^X, W^Y),$$

где V_n — функция цены в момент t_n, D_{n+1} — фазовые ограничения на H_{n+1}^X.

При решении уравнения Беллмана–Айзекса главную сложность представляет нахождение минимума на множестве мер $\mathbb{Q}_{n+1}$. Для определенного набора параметров Θ и мультипликативной ценовой динамики найдены достаточные условия, при которых экстремальная мера сосредоточена в $m+1$ угловой точке носителя, что делает задачу пригодной для численного решения. В рамках конструктивного доказательства мера находится в явном виде.

Рассмотрено обобщение результатов на случай наличия издержек с функцией издержек в общем виде. Для частного случая линейной функции предложена численная схема решения, позволяющая сократить размерность пространства функции цены на m, а при изоэластической функции полезности — перейти к безразмерным величинам.

Литература

1. Deng X.–T., Li Z.–F., Wang S.–Y. A minimax portfolio selection strategy with equilibrium. // European Journal of Operational Research, 2005, Vol. 166, № 1, P. 278–292.
2. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Том 2. Теория. М.: ФАЗИС, 1998.