Соотношение между графиками аффинных конечных автоматов

Лернер Эмиль Эдуардович

Аспирант

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: neex.emil@gmail.com

Для анализа свойств конечных автоматов можно использовать отображения конечного автомата во множество точек на плоскости. Пусть f есть детерминированная функция, задаваемая конечным автоматом Мили A с входным/выходным алфавитом $\{0, 1, \ldots, p-1\}$, тогда f есть 1-липшицево преобразование кольца целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$. Рассмотрим множество точек $\mathbf{P}(A)$ в $[0,1]^2$ вида:

$$\left\{ \left(\frac{x \bmod p^n}{p^n}, \frac{f(x) \bmod p^n}{p^n} \right) : n \in \mathbb{N}, x \in \{0, 1, \ldots, p^n - 1\} \right\}. \qquad (1)$$

Через $\mathbf{LP}(A)$ обозначим замыкание множества $\mathbf{P}(A)$.

В [1] доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть g — дважды дифференцируемая функция, заданная на отрезке $[a,b] \subset [0,1)$, g', g'' непрерывны и верно*

$$\{(y, g(y)) : y \in [a,b]\} \subset \mathbf{LP}(A).$$

Тогда существуют $k, c \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}_p$, такие что $g(x) = kx + c$, при этом A содержит подавтомат, задающий преобразование $kx + c$ в $\mathbb{Z}_p$.

Для целого p-адического $z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n p^n \in \mathbb{Z}_p$ положим $\mathrm{mon}(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n p^{-n-1}$. Тогда соотношение $M_f(\mathrm{mon}(z)) = \mathrm{mon}(f(z))$ задает функцию M_f на отрезке $[0,1]$ определенную и непрерывную всюду, кроме, быть может, счетного числа точек.

Мы можем еще одним способом сопоставить функции f множество точек $\mathbf{M}(f)$ в единичном квадрате:

$$\mathbf{M}(f) = \{(\mathrm{mon}(z), \mathrm{mon}(f(z)) \colon z \in \mathbb{Z}_p\}. \qquad (2)$$

Некоторым аналогом теоремы 1 для представления (2) является следующая теорема, установленная в [2]:

Теорема 2. *Пусть* $M_f(y)$ *дважды дифференцируема на отрезке* (a, b). *Тогда* $M_f(y)$ *является аффинной функцией на* (a, b).

В докладе устанавливается связь между представлениями (1) и (2) для 1-липшицевых аффинных функций, а именно, следующая теорема:

Теорема 3. *Пусть для некоторой 1-липшицевой функции* $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ *верно* $M_f(\mathrm{mon}(x)) = k\,\mathrm{mon}(x) + c$. *Тогда либо* f *является константой, либо она задается конечным автоматом, обладающим следующими свойствами:*

- *Его единственная эргодическая компонента (т.е. минимальный подавтомат) получается из автомата p-адического умножения на целое число* $h = 1/k$ *инвертированием ребер и заменой входных символов выходными (и наоборот).*

- *Автомат попадает в свою эргодическую компоненту из любого состояния за ограниченное число шагов, зависящее только от состояния и не зависящее от символов входа.*

Литература

1. Anashin V. S. Quantization causes waves: Smooth finitely computable functions are affine. Preprint available from `http://arxiv.org/abs/1502.01920`. (Submitted 6 Feb 2015)
2. Лисовик Л. П., Шкаравская О. Ю. О вещественных функциях, задаваемых преобразователями // Кибернетика и системный анализ. 1998. 1. С. 82-93.