Асимптотический анализ степеней случайных матриц

Бритков Радомир Александрович,
Тавыриков Юрий Евгеньевич

Студент, Студент

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: rad.britkov@yandex.ru, tavyrikov@gmail.com

Теория случайных матриц — активно развивающаяся в последние десятилетия область математики. Изучение распределения сингулярных чисел произведения случайных матриц представляет особый интерес для прикладных задач. Результаты исследований данной теории нашли многочисленные приложения в квантовой физике, многомерной статистике, финансовой теории, теории телекоммуникаций и других областях [4].

Рассмотрим случайные величины $X_{ij}^{(k)}, 1 \le i, j < \infty, 1 \le k \le m$, такие что $\mathbb{E}X_{ij}^{(k)} = 0$, $\mathbb{E}(X_{ij}^{(k)})^2 = (\sigma_{ij}^{(k)})^2$. Составим матрицы $\mathbf{X}^{(k)} = \{\frac{1}{\sqrt{n}} X_{ij}^{(k)}\}$ размера $n_k \times n_{k+1}$ и определим матрицу

$$\mathbf{W} = \mathbf{X}^{(1)}\mathbf{X}^{(2)} \cdots \mathbf{X}^{(m)}(\mathbf{X}^{(1)}\mathbf{X}^{(2)} \cdots \mathbf{X}^{(m)})^*.$$

Пусть $s_1^2 \le \ldots \le s_{n_1}^2$ ее собственные значения. Рассмотрим эмпирическую спектральную функцию распределения

$$F^{\mathbf{W}}(x) = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} \mathbb{I}\{s_i^2 < x\}.$$

Если $X_{ij}^{(k)}$ независимы и имеют одинаковые дисперсии $\sigma_{ij}^k \equiv 1$, то $F^{\mathbf{W}}(x)$ слабо сходится к неслучайной функции $G^{(m)}(x)$, которая однозначно определяется своими моментами

$$M_k^{(m)} = \int\limits_{\mathbb{R}} x^k \, dG^{(m)}(x) = \frac{1}{mk+1} \binom{mk+k}{k}.$$

Числа $M_k^{(m)}$ известны как числа Фусса-Каталана, и при $m = 1$ становятся равными моментам распределения Марченко-Пастура [2–3].

Целью нашего исследования являлось обобщение [2–3] на случай, когда элементы матрицы зависимы и имеют различные дисперсии. Рассмотрим квадратные матрицы $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{(1)} = \ldots = \mathbf{X}^{(m)}$ размера n.

Определим набор σ-алгебр $\mathfrak{F}_{ij} = \sigma(X_{kl} : (k,l) \neq (i,j))$ и обозначим сумму дисперсий по строкам как $B_i^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}^2$. Следуя работе Гётце Ф., Наумова А. А. и Тихомирова А. Н. [1] для случая $m = 1$, мы определили условия

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}\mathbb{E}|\mathbb{E}(\mathbf{X}_{ij}^2|\mathfrak{F}_{ij}) - \sigma_{ij}^2| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \qquad \mathbb{E}(\mathbf{X}_{ij}|\mathfrak{F}_{ij}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}\mathbb{E}X_{ij}^2\mathbb{I}\{|X_{ij}| \geq \tau\sqrt{n}\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall\tau > 0, \quad (2)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|B_i^2 - 1| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \qquad \max_{1\leq i\leq n} B_i \leq C \quad (3)$$

и доказали

Теорема 1. *Пусть случайная матрица* $\mathbf{X}$ *удовлетворяет условиям* (1) – (3). *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}F^{\mathbf{W}}(x) = G^{(m)}(x).$$

С помощью моделирования нами было установлено, что при выполнении условий (1) – (3) эмпирическая спектральная функция распределения матрицы $\mathbf{W} = \mathbf{XY}(\mathbf{XY})^*$ сходится к $G^{(2)}(x)$.

Также на основе численных экспериментов было показано, что при нарушении указанных условий эмпирическая спектральная функция распределения сходится к отличной от $G^{(m)}(x)$ функции.

Литература

1. Гётце Ф., Наумов А. А., Тихомиров А. Н. Предельные теоремы для двух классов случайных матриц с зависимыми элементами // Теория вероятностей и ее применения. – 2014. – Т. 59. – №. 1. – С. 61-80.
2. Марченко В. А., Пастур Л. А., Распределение собственных значений в некоторых ансамблях случайных матриц. — Матем. сб., 1967, v. 72, № 4, p. 507–536.
3. Alexeev N., Gotze F., Tikhomirov A. Asymptotic distribution of singular values of powers of random matrices // Lithuanian mathematical journal. – 2010. – Т. 50. – №. 2. – С. 121-132.
4. The Oxford handbook of random matrix theory. – Oxford University Press, 2011.