Вопрос унификации и базис пассивных правил в многомодальной логике LTK

Башмаков Степан Игоревич

Аспирант

Институт математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета, Красноярск, Россия

E-mail: krauder@mail.ru

Унификационная проблема в данной работе рассматривается как вопрос возможности преобразования формулы в теорему после замены переменных. В [1] были предложены подходы к определению всех неунифицируемых формул для расширений $S4$ и $[K4 + \Box\bot \equiv \bot]$. В данной работе нами построен критерий для всех неунифицируемых формул в многомодальной логике знания и линейного времени LTK. Основываясь на этом результате, мы описываем конечный базис пассивных правил в логике LTK.

Определение 1. *Формула $\alpha(p_1, \dots, p_n)$ унифицируема в алгебраической логике λ тогда и только тогда, когда существует набор формул $\delta_1, \dots, \delta_n$ такой, что $\vdash_\lambda \alpha(\delta_1, \dots, \delta_n)$.*

Определение 2. *LTK-фрейм Крипке это $(k+2)$-модальный фрейм $F = \langle W_F, R_1, \dots, R_k, R_e, R_\leq \rangle$, где:*
a. W_F — объединение всех непустых непересекающихся сгустков: $W_F := \bigcup_{t \in N} C^t$;
b. $R_1, ...R_k$ — некоторые отношения эквивалентности внутри каждого C^t;
c. R_e — универсальное $S5$-отношение эквивалентности на любом $C^t \in W_F$: $\forall w, z \in W_F (wR_e z \Leftrightarrow (w \in C^t) \& (z \in C^t))$;
d. $R_\leq$ — линейное, рефлексивное, транзитивное отношение по времени на сгустках из W_F: $\forall v, z \in W_F : (vR_\leq z \Leftrightarrow \exists i, j \in N : ((v \in C^i) \& (z \in C^j) \& (i \leq j)))$;

Класс всех таких фреймов обозначим LTK.

Определение 3. *Моделью M_F на LTK-фрейме F называют двойки $M_F = \langle F, V \rangle$, где V — это означивание множества пропозициональных переменных $p \in P$ на фрейм, т.е. $\forall p \in P\ [V(p) \subseteq W_F]$. Пусть задана модель $M_F = \langle F, V \rangle$, где F — LTK-фрейм W_F. Тогда $\forall w \in W_F$:*
a. $\langle F, w \rangle \Vdash_V p \Leftrightarrow w \in V(p)$;
b. $\langle F, w \rangle \Vdash_V \Box_\leq A \Leftrightarrow \forall z \in W_F (wR_\leq z \Rightarrow \langle F, z \rangle \Vdash_V A)$;

c. $\langle F, w\rangle \Vdash_V \Box_e A \Leftrightarrow \forall z \in W_F(wR_e z \Rightarrow \langle F, z\rangle \Vdash_V A)$;
d. $\forall i \in I, \langle F, w\rangle \Vdash_V \Box_i A \Leftrightarrow \forall z \in W_F(wR_i z \Rightarrow \langle F, z\rangle \Vdash_V A)$.

Определение 4. $LTK := \{A \in Fma(L^{LTK}) | \forall F \in LTK(F \Vdash A)\}$.

Определение 5. *Пусть* $r := A_1, ..., A_n/\beta$ *— правило вывода в логике* LTK. *Правило* r *называется пассивным в* LTK, *если формулы из его посылки не имеют общих унификаторов.*

Теорема 1. *Любая модальная формула* A *не унифицируема в* $LTK \Leftrightarrow \Box_{\leq} A \to \left[\bigvee_{p \in Var(A)} \Diamond_{\leq} p \wedge \Diamond_{\leq} \neg p\right] \in LTK$.

Лемма 1. *Правила* $r_n := \frac{\bigvee_{1 \leq i \leq n} \Diamond_{\leq} p_i \wedge \Diamond_{\leq} \neg p_i}{\perp}$ *формируют базис для всех пассивных правил* LTK.

Теорема 2. *Правило* $r := \frac{\Diamond_{\leq} p \wedge \Diamond_{\leq} \neg p}{\perp}$ *является базисом для всех пассивных правил* LTK.

Литература

1. Rybakov V. Terziler M. Gencer C. An essay on unification and inference rules for modal logics // Bulletin of the Section of Logic. 1999. Vol.28/3. P. 145–157.