# Метод гомотопного анализа в задаче исследования уравнения Дикмана

***Калистратова Анастасия Владимировна***

*Студент*

*Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*

*E-mail:* kanast74@gmail.com

Предметом данного исследования является метод гомотопного анализа HAM (Homotopy Analysis Method) в применении к решению интегрального уравнения, возникающего в разработанной Ульфом Дикманом и Ричардом Лоу модели некоторого стационарного экологического сообщества [1], состоящего из особей одного вида, с известными функциями, задающими рождаемость (dispersal kernel) и смертность (competition kernel) внутри популяции. Цель состоит в отыскании равновесных средних ожидаемых плотностей популяции $N$, видовых пар $C(\xi)$, а также видовых троек $T(\xi,\xi')$. Причём последняя может быть аппроксимирована при помощи функций $N$ и $C(\xi)$:

$$T(\xi,\xi') = \frac{C(\xi)C(\xi')}{N} \tag{1}$$

В рамках указанной модели экологическое сообщество может быть описано набором следующих параметров: $b, b'$ — темпы естественной рождаемости и рождаемости в условиях конкуренции, $d, d'$ — темпы естественной смертности и смертности от конкуренции, а также $m(\xi), w(\xi)$ — ядра рассеивания и конкуренции (dispersal and competition kernels). В данных обозначениях искомое интегральное уравнение может быть записано следующим образом:

$$\frac{m(\xi)Y}{b-d}\int w(\xi)C(\xi)d\xi + b\int m(\xi)C(\xi'+\xi)d\xi' - d'w(\xi)C(\xi) - bC(\xi) = 0 \tag{2}$$

Здесь $Y = \int w(\xi)C(\xi)d\xi$, средняя плотность популяции может быть найдена с помощью формулы: $N = \frac{b-d}{Y}$.

Метод HAM для решения интегральных уравнений [2] состоит в построении непрерывного отображения начального приближения на точное решение, для чего используется некоторый вспомогательный параметр $q$, непрерывно меняющийся от нуля до единицы. А значит и функция $\varphi(x;q)$, задающая решение, также непрерывно меняется от начального приближения до точного решения. Мало того, функция $\varphi(x;q)$ допускает разложение в ряд Тэйлора по степеням $q$:

$$\varphi(x;q) = y_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} y_m(x) q^m, \tag{3}$$

где

$$y_m(x) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \varphi(x;q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} \tag{4}$$

А значит искомое решение может быть найдено следующим образом:

$$y(x) = \varphi(x;1) = y_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} y_m(x) \tag{5}$$

Метод HAM имеет несколько неоспоримых преимуществ: во-первых, он может быть использован для решения в том числе нелинейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода; во-вторых, он характеризуется простотой доказательства сходимости и поиска условий, накладываемых на параметры системы, обеспечивающих его сходимость. В частности, было доказано, что при решении уравнения (2) метод сойдётся, если соблюдается условие $3d = b + d'$.

Решения уравнения (2) были получены при помощи метода HAM в случаях, когда ядра являются рациональными функциями, гауссианами, плотностями распределения Стьюдента, а также куртозианами. В будущем планируется рассмотреть и другие виды ядер, а также иные замыкания третьего момента, отличные от (1). Наконец, следует установить погрешность решения, получаемого методом HAM, и оценить скорость его сходимости при решении, как уравнения (2), так и ряда его модификаций.

Данная работа поддержана Программой Президента РФ для поддержки молодых российских учёных, грант МК-6108.2015.9.

## Литература

1. Dieckmann U., Law R. The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity // Cambridge University Press, 2000
2. Wazwaz Abdul-Majid. Linear and Nonlinear Integral Equations. Methods and Applications // Springer, 2011