

**МОДЕЛИРОВАНИЕ
КОНВЕКЦИОННО-ДИФфуЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В
ПОРИСТОЙ СРЕДЕ**

Левин Александр Дмитриевич

Студент

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: alev343@gmail.com

Одной из ключевых проблем математического моделирования процессов жизнедеятельности человека является численный расчёт распространения веществ различной природы по организму. При рассмотрении таких задач исследователь с большой вероятностью столкнется с такими неизбежными трудностями, как сложность устройства человеческого организма в целом, так и необходимость учитывать многие факторы и различные параметры, такие как неоднородность тканей и особенности строения конкретного индивида.

Существенным процессом в организме человека является процесс диффузионного распространения веществ по тканям, окружающим кровеносные сосуды. Отметим, что при моделировании и математическом описании данного процесса важно учитывать, что ткань представляет собой сорбент (её клетки могут поглощать вещества и, соответственно, наоборот, выделять их после достижения точки насыщения) и обладает неоднородными диффузионными свойствами, то есть содержит внутри себя различные зоны повышенной или пониженной диффузии произвольной формы.

Целью данной работы является моделирование распространения вещества в ограниченном участке ткани, окружающей кровеносный сосуд, с учётом вышеупомянутых особенностей, а так же анализ влияния областей пониженной диффузии внутри ткани на распространение по ней вещества и время его пребывания внутри до дальнейшего удаления посредством кровотока через стенки сосуда. Область, в которой решается задача, изображена на рис. 1 и представляет собой кровеносный сосуд длины l радиуса r_0 , окруженный тканью радиуса R . Рассматривается случай цилиндрической симметрии, то есть вещество распространяется равномерно по всем углам относительно оси сосуда. На границе «сосуд-ткань» при $r = r_0$ задан ненулевой поток $\mu(x, t)$ вещества, потоки вещества через остальные границы равны нулю.

Процесс распространения вещества по ткани описывается следующей системой уравнений относительно массовой концентрации ве-

щества $u(r, x, t)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = k\Delta u + F_s(r, x, t), \quad r_0 < r < R; 0 < t \leq T; 0 < x < l \\ \frac{\partial u}{\partial r}(R, x, t) = 0, \quad 0 < t \leq T; 0 \leq x \leq l \\ \frac{\partial u}{\partial t}(r_0, x, t) = \mu(x, t), \quad 0 < t \leq T; 0 \leq x \leq l \\ \frac{\partial u}{\partial x}(r, 0, t) = 0, \quad 0 < t \leq T; r_0 \leq r \leq R \\ \frac{\partial u}{\partial x}(r, l, t) = 0, \quad 0 < t \leq T; r_0 \leq r \leq R \end{array} \right.$$

Коэффициент диффузии k , вообще говоря, не является константой, а задан функцией $k(r, x)$, что отражает ранее упомянутые неоднородные диффузионные свойства ткани.

В рассматриваемой области вводится расчетная сетка, равномерная по координате x и неравномерная по радиусу r . Уравнение диффузии аппроксимируется разностной схемой с весами на пятиточечном шаблоне типа «крест». После аппроксимации система сеточных уравнений сводится к системе трехточечных векторных уравнений, которая решена в работе методом матричной прогонки [1]. В работе исследована устойчивость и корректность применённого алгоритма [2].

В работе представлена программная реализация на языке *Fortran 90* описанного алгоритма. С синтаксисом и семантикой языка можно ознакомиться в литературе [3]. Реализованная программа является ключевой составляющей состоящего из нескольких модулей программного комплекса CDP (от англ. convective-diffusive processes), осуществляющего расчёт массовой концентрации вещества всюду внутри ткани и внутри кровеносного сосуда по начальным данным в любой заданный момент времени. Программный код комплекса CDP представлен в приложении к работе и доступен для ознакомления. С помощью данного комплекса были проведены многочисленные численные расчеты, были построены графики зависимости различных величин, на основании которых сделан вывод о зависимости распространения вещества и времени его пребывания внутри ткани от областей пониженной диффузии. Было выявлено, что имеется ярко выраженная зависимость как от наличия и величины таких областей, так и от их места расположения внутри ткани.

В настоящее время ведётся модернизация реализованной модели и разрабатывается алгоритм решения аналогичной задачи распространения веществ в трехмерной пористой области без каких-либо ограничений и допущений, как цилиндрическая симметрия, о которой упоминалось ранее.

В заключение хочется выразить благодарность и признательность С. И. Мухину, профессору кафедры вычислительных методов факультета ВМК МГУ, за тематическую идею и бесценную помощь в анализе полученных в работе результатов, а также коллегам по кафедре, П. А. Лукшину и Е. А. Макаровой, за помощь в реализации и отладке программного комплекса СDR.

Иллюстрации

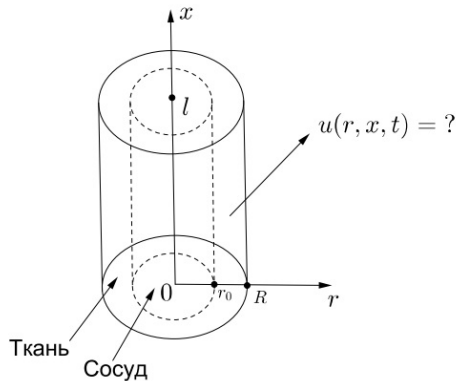


Рис. 1. Область, в которой решается задача

Литература

1. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы математической физики. М.: Изд-во Научный Мир, 2000. С.180–190.
2. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1978. С.103–109.
3. Stephen J. Chapman FORTRAN 90/95 for Scientists and Engineers. McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 1997.