Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Функция Вигнера на пространстве с нелебеговой мерой

Левин Андрей Александрович

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра теории функций и функционального анализа, Москва, Россия

E-mail: letlevin@gmail.com

Тезисы доклада:

В данной работе вводятся необходимые понятия для описания квантовой системы исходя из строгих определений функционального анализа. Затем вводится модель псевдодифференциального оператора и символов Вейля. Делаются некоторые замечания относительно свойств символа Вейля.

Вводится понятие оператора плотности. Который представляет собой способ описания состояния квантовой системы. Впервые независимо оператор плотности был предложен независимо Дж. фон Нейманом и Л. Д. Ландау в 1927 году. Оператор плотности определяется, как оператор на сепарабельном гильбертовом пространстве H .

Рассматриваются некоторые свойства оператора плотности. В

Затем Рассматриваются 3 определения функции Вигнера $W_{\hat{\rho}_\Psi}$, которая впервые была введена в статье [2]. А другие два определения, введенные в статье [1], и строго доказывается их эквивалентность. Затем делается замечание для случая нелебеговой меры.

Определение 1.

Функция Вигнера $W_{\hat{\rho}_\Psi}$, соответствующая оператору плотности $\hat{\rho}_\Psi$ есть символ Вейля ρ_Ψ оператора $\hat{\rho}_\Psi$, деленный на $(2\pi)^n$:

$$\hat{\rho}_\Psi(\varphi)(q) = \tag{1}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_P \int\limits_Q \rho_\Psi\left(\frac{q_1+q}{2},\, p\right) e^{-ip(q_1-q)} \varphi(q_1) \rho_{*Q}^{-1} \rho_{*P}^{-1}\, \mu_{*Q}(dq_1)\, \mu_{*P}(dp) \tag{2}$$

Определение 2.

Функция Вигнера $W_{\hat{\rho}_\Psi}$, соответствующая оператору плотности $\hat{\rho}_\Psi$ есть:

$$W_{\hat{\rho}_\Psi}(q,p) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_Q K_{\hat{\rho}}\left(q - \frac{1}{2}r,\, q + \frac{1}{2}r\right) e^{irp} \rho_{*Q}^{-1}\, \mu_{*Q}(dr) \tag{3}$$

.

Затем доказывается несколько предположений, позволяющих показать эквивалентность двух определений.

Предположение.

Рассматривается самосопряженный интегральный оператор

$$\hat{T}\varphi(p) = \int K_{\hat{T}}(q,p)\varphi(q)\rho_{*Q}^{-1}\, \mu_{*Q}(dq), \tag{4}$$

В таком случае для его ядра верно $K_{\hat{T}}(q,p) = \bar{K}_{\hat{T}}(p,q)$. Пусть оператору $\hat{T}$ соответствует символ Вейля T. Пусть также оператор положительно определен, $K(q,q) \geqslant 0$ тогда

$$Tr(\hat{T}) = \int K_{\hat{T}}(q,q)\rho_{*Q}^{-1}\,\mu_{*Q}(dq) \tag{5}$$

Далее рассматривается следующее утверждение, при доказательстве которого используется несколько сопутствующих лемм:

Предположение.

Рассматривается ядерный интегральный оператор $\hat{T}$, которому соответствует символ Вейля T, тогда

$$Tr(\hat{T}) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\int T(q,p)\rho_{*Q}^{-1}\rho_{*P}^{-1}\,\mu_{*Q}(dq)\mu_{*P}(dp) \tag{6}$$

Предположение.

Если интегральному оператор $\hat{T}$ соответствует символ Вейля T, интегральному оператор $\hat{P}$ соответствует символ Вейля P тогда

$$Tr(\hat{T}\hat{P}) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\int T(q,p)P(q,p)\,\rho_{*Q}^{-1}\,\rho_{*P}^{-1}\,\mu_{*Q}(dq)\,\mu_{*P}(dp) \tag{7}$$

Определение 3.

Функция Вигнера $W_{\hat{\rho}_\Psi}$, соответствующая оператору плотности $\hat{\rho}_\Psi$ есть интегральноя ядро оператора $Tr\hat{\rho}_\Psi\hat{T}$:

$$Tr\hat{\rho}_\Psi\hat{T}(q,p) = \int\int W_{\hat{\rho}_\Psi}(q,p)T(q,p)\,\rho_{*Q}^{-1}\,\rho_{*P}^{-1}\,\mu_{*Q}(dq)\,\mu_{*P}(dp) \tag{8}$$

где $T(q,p)$ символ Вейля, соответствующий оператору $\hat{T}$.

Далее в работе определяется гауссова мера и рассматриваются некоторые ее свойства с использованием преобразования Фурье меры.

Список литературы

[1] В. В. Козлов, О. Г. Смолянов, “Функция Вигнера и диффузия в бесстолкновительной среде, состоящей из квантовых частиц”, ТВП, 51:1 (2006), 109–125

[2] E.P. Wigner, On the quantum correction for thermodynamic equilibrium, Phys. Rev. 40 (June 1932) 749—759.

[3] Богачев В. И., Смолянов О. Г. Действительный и функциональный анализ. Университетский курс. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009 г. 724 стр.

[4] Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М. Квантовая механика (нерелятивистская теория). — Издание 4-е. — М.: Наука, 1989. — 768 с. — («Теоретическая физика», том III). — ISBN 5-02-014421-5 — § 14.

[5] фон Нейман Дж. Математические основы квантовой механики. — М.: Наука, 1964. — 368 с.

[6] Балеску Р. Равновесная и неравновесная статистическая механика. В двух томах. М.: Мир, 1978.