Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

О проблеме Шварца для уравнений свертки на выпуклых множествах с препятствием, открытым на границе

Стефаненко Любовь Валерьевна

Аспирант

Южный федеральный университет, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Ростов-на-Дону, Россия

E-mail: stefanenko.lv@mail.ru

В докладе идет речь о характере разрешимости уравнений свертки в пространствах функций, аналитических на выпуклых множествах специального вида. Рассматриваемая задача аналогична проблеме Шварца существования оператора решения для уравнения конечного порядка в частных производных с постоянными коэффициентами в пространствах бесконечно дифференцируемых функций и распределений на открытых множествах в $\mathbb{R}^N$, поставленной им в середине 50-х годов прошлого века. Сформулируем соответствующую задачу.

Пусть Q – ограниченное выпуклое подмножество $\mathbb{C}$ с непустой внутренностью, обладающее счетным базисом окрестностей, состоящим из выпуклых областей. Для существования такого базиса необходимо и достаточно, чтобы множество $\omega := Q \cap (\partial Q)$ было компактно и любая опорная прямая к $\overline{Q}$ — замыканию Q — не пересекала одновременно множество ω и $(\partial Q) \setminus \omega$. При этом символ ∂Q обозначает границу Q. Пусть $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ – базис окрестностей Q, где Q_n – области такие, что $Q_{n+1} \subseteq Q_n$; $A(Q_n)$ — пространство Фреше всех аналитических в Q_n функций; $A(Q) := \mathrm{ind}_{n\to} A(Q_n)$ — пространство ростков всех функций, аналитических на Q. Множество $(\partial Q) \setminus \omega$ может быть интерпретировано как препятствие для аналитического продолжения функций из $A(Q)$.

Пусть K — выпуклый компакт в $\mathbb{C}$. Базисом окрестностей множества $Q + K$ является последовательность $(Q_n + K)_{n \in \mathbb{N}}$. Положим $A(Q + K) := \mathrm{ind}_{n\to} A(Q_n + K)$. Для линейного непрерывного на $A(K)$ функционала μ оператор свертки

$$T_\mu(f)(z) := \mu_t(f(t+z)),\ f \in A(Q+K),$$

линейно и непрерывно отображает $A(Q + K)$ в $A(Q)$.

Задача заключается в нахождении условий, при которых сюрьективный оператор свертки $T_\mu : A(Q + K) \to A(Q)$ имеет линейный непрерывный правый обратный.

Установлен критерий существования линейного непрерывного правого обратного к сюрьективному оператору свертки $T_\mu : A(Q+K) \to A(Q)$. Он получен в терминах граничного поведения выпуклых конформных отображений, связанных с Q, в направлениях, определяемых нулевым множеством характеристической функции оператора T_μ.

Ранее аналогичные результаты были получены в случаях, когда выпуклое множество Q является областью, компактом, локально замкнутым множеством (см. [1, гл. 3], [2]).

Источники и литература

1) Коробейник Ю.Ф. О разрешимости в комплексной области некоторых классов линейных операторных уравнений. Ростов-на-Дону, изд-во ЮФУ, 2009. 252 с.
2) Melikhov S.N., Momm S. Analytic solutions of convolution equations on convex sets with an obstacle in the boundary // Math. Scand. 2000. V. 86. P. 293–319.

Слова благодарности

Выражаю благодарность своему научному руководителю Сергею Николаевичу Мелихову за постановку задачи и помощь в исследовании.