

Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Модель управления запасами с ненадёжным поставщиком

Безуглая Татьяна Викторовна

Студент (бакалавр)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия

E-mail: t.bezouglaya@gmail.com

1. Постановка задачи и её актуальность

Компания преследует цель оптимизировать издержки, возникающие у неё при управлении запасами, которые образуются в процессе заказа товара у поставщика и его последующей отгрузки потребителю.

Данный процесс разворачивается в течение $n \geq 1$ периодов. Заказы производятся компанией в начале каждого периода. Будучи ненадёжным, поставщик доставляет заказ немедленно с вероятностью $0 > p > 1$ и с вероятностью $q = 1 - p$ с задержкой в один период. Требования со стороны потребителя образуют последовательность независимых одинаково распределённых неотрицательных случайных величин $\{\xi_i\}_{i \geq 1}$ с распределением

$F_{\xi_i}(x) = \int_0^x \phi(s) ds$. В процессе управления запасами компания несёт издержки:

- 1) c – стоимость заказа единицы товара;
- 2) h – стоимость хранения единицы товара в течение одного периода в случае, если требование не полностью исчерпало имеющийся запас;
- 3) t – штраф за недостающую единицу товара в случае образования дефицита.

Необходимо найти политику заказа товаров, минимизирующую средние дисконтированные издержки за n периодов, α – коэффициент дисконтирования будущих издержек. Нахождение оптимального уровня запасов $y_n(x)$ (функции, зависящей исключительно от числа периодов n и величины первоначального запаса x) позволит:

- 1) оптимизировать непосредственно издержки управления запасами;
- 2) сократить издержки на персонал, автоматизировав процесс управления запасами.

2. Используемый метод решения

Задача решается методом динамического программирования (метод функциональных уравнений Р.Беллмана).

3. Вид функционального уравнения

Пусть $f_n(x)$ – математическое ожидание общих дисконтированных издержек для n -шагового процесса при начальном запасе x и оптимальном поведении в области заказов. В целях удовлетворения спроса величиной y компания пополняет имеющийся запас x на недостающую величину $(y - x)$.

Математическое ожидание понесённых компанией расходов при начальном запасе x составит:

- 1) Для одношагового процесса:

$$f_1(x) = -cx + qL(x) + \min_{y \geq x} G_1(y),$$

где

$$G_1(y) = cy + pL(y),$$

$$L(y) = h \int_0^y (y-s)\phi(s)ds + t \int_y^{+\infty} (s-y)\phi(s)ds.$$

2) Для n -шагового процесса:

$$f_n(x) = -cx + qL(x) + \min_{y \geq x} G_n(y),$$

где

$$G_n(y) = G_1(y) + \alpha \int_0^{+\infty} f_{n-1}(y-s)\phi(s)ds.$$

4. Вид оптимального поведения

Критический уровень запасов \bar{x}_n при n -шаговом процессе задаётся уравнением

$$G'_n(y) = 0.$$

Оптимальное поведение в области заказов описывается, в зависимости от соотношения параметров, одной из следующих теорем: При $pt > c$ для каждого n оптимальное поведение $y_n(x)$ имеет вид:

$$y_n(x) = \begin{cases} \bar{x}_n, & x \leq \bar{x}_n \\ x, & x \geq \bar{x}_n, \end{cases}$$

где \bar{x}_n – монотонно возрастающая по n последовательность. Для любого $k \geq 2$ при

$$pt + \alpha \frac{1 - \alpha^{k-2}}{1 - \alpha} t > c > pt + \alpha \frac{1 - \alpha^{k-1}}{1 - \alpha} t$$

оптимальное поведение $y_n(x)$ имеет следующий вид:

1) Для $n > k$ $y_n(x) = x$;

2) Для $n \geq k$

$$y_n(x) = \begin{cases} \bar{x}_n, & x \leq \bar{x}_n \\ x, & x \geq \bar{x}_n, \end{cases}$$

где \bar{x}_n – монотонно возрастающая по n последовательность.

5. Аппроксимация бесконечношаговым процессом

Критический уровень запасов \bar{x}_{n+1} задаётся уравнением:

$$\begin{aligned} G'_{n+1}(y) &= G'_1(y) + \alpha \int_0^{+\infty} f'_n(y-s)\phi(s)ds = \\ &= c(1-\alpha) + pL'(y) + \alpha q \int_0^{+\infty} L'(y-s)\phi(s)ds. \end{aligned}$$

Данной функцией удобно пользоваться при большом n для упрощения поиска решения.

Источники и литература

- 1) Беллман Р. Динамическое программирование. Перевод с англ. И.М. Андреевой, А.А. Корбута, И.В. Романовского, И.Н. Соколовой. Под ред. Н.Н. Воробьева. – Москва: Издательство иностранной литературы, 1960.

Слова благодарности

Автор выражает признательность Е.В. Булинской за руководство в работе, помощь в подготовке тезисов, замечания и предложения.