Топология некоторых интегрируемых случаев биллиардной системы

Научный руководитель – Фоменко Анатолий Тимофеевич

Кобцев Иван Федорович
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: int396.kobtsev@mail.ru

В работе исследуется эллиптический биллиард с потенциалом, то есть движение внутри эллипса $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$ под действием силы с потенциальной энергией $V=\frac{k}{2}(x^2+y^2)$ и с отражением от границы эллипса по правилу "угол падения равен углу отражения". Как показано в [2], эта задача является интегрируемой с интегралами

$$H=\frac{k}{2}(x^2+y^2)+\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2),$$
$$F=\frac{\dot{x}^2}{a^2}+\frac{\dot{y}^2}{b^2}-\frac{(\dot{x}y-\dot{y}x)^2}{ab}-k\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)$$

Следовательно, можно изучать топологию изоэнергетического многообразия $Q^3=\{H=h\}$. Но симплектическое многообразие, на котором определена биллиардная система, уже не является гладким (из-за отражения на границе), поэтому "классический"алгоритм исследования, основанный на теореме Лиувилля, неприменим. Используемый в работе метод основан на разделении переменных (в данной биллиардной задаче оно успешно осуществляется) и поиске разделяющего множества - аналога бифуркационной диаграммы [3]. Такой подход позволяет явно искать торы Лиувилля, а также определить типы их перестроек в терминах инвариантов Фоменко-Цишанга [1]. Также найдена бифуркационная диаграмма задачи и построена молекула Фоменко - инвариант грубой лиувиллевой эквивалентности.

Источники и литература

1) Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. 1,2. Ижевск:РХД, 1999.
2) Козлов В. В. Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде // Прикладная математика и механика, том 59, вып. 1, 1995.
3) М. П. Харламов. Топологический анализ и булевы функции: I. Методы и приложения к классическим системам // Нелинейная динамика, 2010, том 6, № 4, 769-805.