Бигамильтоновы пучки на подпространствах бигамильтонова пространства

Научный руководитель – Фоменко Анатолий Тимофеевич

Битуева Лидия Мухамедовна

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: chiyodaizer@gmail.com

На бигамильтоновом пространстве заданы две билинейные кососимметрические формы A и B, одна из которых невырождена. Цель - понять, как формы ведут себя при ограничении на подпространства, и, таким образом, классифицировать типы подпространств относительно двух заданных форм. То есть, пусть у нас есть подпространство U. Необходимо понять, как выглядят матрицы форм, суженные на U - найти канонический вид матриц $A|_U B|_U$.

В работе рассматривается случай четырехмерного и шестимерного пространства. Для четырехмерного сформулирована теорема:

Теорема. Пусть A и B - кососимметрические билинейные формы на $\mathbb{C}^4$, и B невырожденная. Канонический вид этой пары форм имеет вид

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда подпространство U классифицируется четырьмя числами : $dim(U)$, $dim(U \cap U_A^{\perp})$, $dim(U \cap U_B^{\perp})$, $dim(U \cap U_A^{\perp} \cap U_B^{\perp})$ и для каждого случая предъявим канонический вид ограничения форм на подпространство.

Другими словами, подпространства с одинаковыми наборами этих чисел будут эквивалентны, а с разными наборами - не эквивалентны.

Также в работе рассматривается связь между каноническим видом форм, суженных на подпространства, и оператором $R = B^{-1}A$ (для случая, если форма B является невырожденной). Например, для подпространства U, инвариантного относительно оператора R, оператор R можно рассматривать как оператор $R : U \to U$, что, в свою очередь, означает, что в U лежит собственный вектор оператора. Таким образом получаем, что собственный вектор оператора R лежит в U. Собственный вектор можно рассматривать в качестве базисного вектора, в том базисе, в котором формы A и B будут иметь канонический вид.

Было показано, что для четырехмерного случая, реализуются слудующие наборы чисел:

$dimU$	$\dim\,(U_A^{\perp} \cap U)$	$\dim\,(U_B^{\perp} \cap U)$	$\dim\,(U_A^{\perp} \cap U \cap U_B^{\perp})$	A	B
2	0	0	0	$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
2	0	2	0	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
2	2	0	0	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
2	2	2	2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
3	1	1	1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & -a & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
3	1	1	0	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & -a & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3	3	1	1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Источники и литература

1) А. Т. Фоменко. Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы. Редакция журанала "Регулярная и хаотическая динамика", Издательский дом "Удмуртский университет", 1999 г.
2) Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. Издательство "Наука", главная редакция физико-математической литературы, Москва, 1966 г.
3) В. И. Арнольд, А. Б. Гивенталь. Симплектическая геометрия. Итоги науки и техн. Соврем. проблемы математики. Фундаментальные направления. 1985 г.
4) И. К. Козлов. Элементарное доказательство теоремы Жордана–Кронекера. 2011. http://arxiv.org/pdf/1109.5371.pdf