

Интегрируемые бильярды в книжке**Научный руководитель – Фоменко Анатолий Тимофеевич****Харчева Ирина Сергеевна***Студент (специалист)*

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
 Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и
 приложений, Москва, Россия
E-mail: irina_harcheva@mail.ru

Определение 1. *Бильярдной книжкой* назовем несвязное объединение n бильярдных областей, каждая из которых ограничена дугами эллипсов и гипербол одного софокусного семейства, отождествленное вдоль некоторых выпуклых сегментов границ.

Движение в бильярдной книжке определяется следующим образом – точка движется внутри листа бильярдной книжки, абсолютно-упруго отражаясь от границы, а при попадании на ребро склейки ("корешок книжки") переходит с одного листа на другой, отражаясь от этого ребра склейки. Вследствие теоремы Якоби-Шаля бильярд в каждой бильярдной области вполне интегрируем, что влечет за собой вполне интегрируемость движения в бильярдной книжке: каждое звено траектории-ломаной лежит на прямой, являющейся касательной к некоторой фиксированной квадрике, софокусной сегментам границы.

Таким образом, у динамической системы на многообразии M^4 есть 2 интеграла: вектор скорости f и параметр квадрики g , которой касается траектория. Рассмотрим $Q^3 = \{x \in M^4 : f(x) = 1\}$ и его слоение Лиувилля со слоями $\{x \in Q^3 : g(x) = \lambda\}$. Можем показать, что каждая связная компонента неособого слоя есть тор. А особые слои описывают перестройку этих торов. Инвариантная окрестность особого слоя $\{x \in Q^3 : g(x) \in \{\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon\}\}$ называется атомом. Если отождествить связные компоненты слоя, получим граф, вершины которого являются атомами. Ребра графа снабдим метками, которые будут показывать, как склеены торы. Граф с метками на ребрах называется меченой молекулой Фоменко-Цишанга, без меток - грубой молекулой Фоменко. Из теоремы Фоменко-Цишанга следует, что меченая молекула является полным инвариантом слоения Лиувилля многообразия Q^3 . Это позволяет сравнивать слоения Лиувилля разных динамических систем (подробнее см. [n1]).

Теорема 1. *Для бильярдных книжек, отвечающих склейке из таблицы на рисунке 2 слева, указанные меченные молекулы являются инвариантами Фоменко-Цишанга [n1] и описывают топологию слоения Лиувилля Q^3 .*

Утверждение 1. *Для бильярдных книжек, отвечающих склейке из таблицы на рисунке 2 справа, указанные молекулы являются грубыми инвариантами Фоменко [n1] и описывают перестройку торов Лиувилля в Q^3 .*

Источники и литература

- 1) А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Ижевск; НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика 1999. Т.1.
- 2) Фокичева В. В. Топологическая классификация бильярдов в локально-плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик // Математический сборник. 2015. Т. 206, № 10. С. 127–176.

Иллюстрации

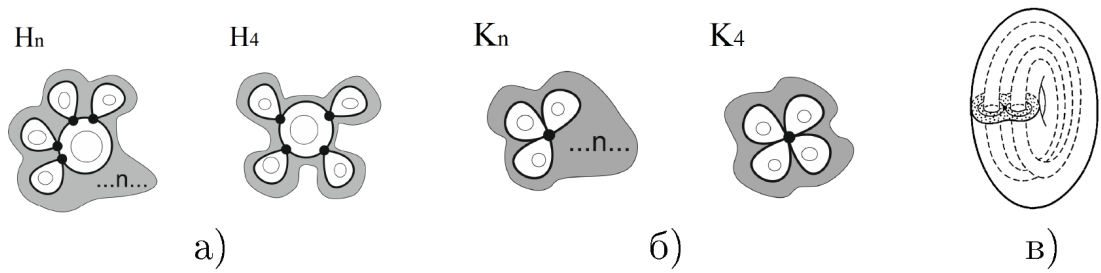


Рис. 1. На рисунке а) изображены двумерные атомы серии H_n и частный случай – атом H_4 . На рисунке б) изображены двумерные неморсовские атомы серии K_n , а также его частный случай при $n = 4$. 3-атомы получаются умножением соответствующего 2-атома на окружность. Атом, получившийся умножением 2-атома K_n на окружность и последующей факторизацией по действию группы \mathbb{Z}_n , назовем 3-атомом $K_{1,n}^*$. Легко понять, что в случае $n = 2$ атом $K_{1,n}^*$ совпадает с атомом A^* , изображённом на рисунке в).

Название книжки	Книжка для p=4	Инвариант Фоменко-Цишанга	Название книжки	Книжка для p=4	Грубая молекула Фоменко
$\Delta_\alpha(nA'_0)$		$\begin{array}{c} A \\ \\ r = 0 \\ \\ \varepsilon = 1 \\ A \end{array}$	$\Delta_\gamma(nA'_0)$		$\begin{array}{c} A \\ \\ K_n \\ / \quad \backslash \\ A \quad A \quad \dots n \dots \quad A \end{array}$
$\Delta_\beta(nA'_0)_y$		$\begin{array}{c} A \\ \\ r = \frac{1}{n} \\ \\ \varepsilon = 1 \\ A \end{array}$	$\Delta_\beta(nA'_0)_c$		$\begin{array}{c} A \\ \\ K_{1,n}^* \\ \\ A \end{array}$
$\Delta_\alpha(nA_0)$		$\begin{array}{c} A \\ \\ r = \infty \\ \varepsilon = 1 \\ / \quad \backslash \\ r=0 \quad r=0 \\ \varepsilon=1 \quad \varepsilon=1 \\ A \quad A \quad \dots n \dots \quad A \end{array}$	$\Delta_\beta(nA'_0)_{yc}$		$\begin{array}{c} A \\ \\ K_{1,n}^* \\ \\ A \end{array}$

Рис. 2. Инварианты Фоменко-Цишанга и грубые молекулы Фоменко для указанных бильярдных книжек.