Конференция «Ломоносов 2017»

Секция «Геометрия и топология»

Минимальные сети Штейнера на вершинах n-мерного симплекса

Научный руководитель – Иванов Александр Олегович

Ваганов Никита Павлович
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: vaganovnp@gmail.com

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство и $G = (V, E)$ — граф на X, то есть, $V \subset X$. Для каждого такого графа определены длины его ребер $e = \{u, v\} \in E$ как расстояния $\rho(u, v)$ между их вершинами, а также длина $\rho(G)$ самого графа G как сумма длин всех его ребер.

Если M — конечное подмножество X, а $G = (V, E)$ — связный граф на X, для которого $M \subset V$, то G называется графом, соединяющим M. При этом граф G, соединяющий M, минимально возможной длины $\rho(G)$ является деревом, которое называется минимальным деревом Штейнера на M. Дерево называется локально минимальным если углы между смежными ребрами не меньше $120°$.

Пусть теперь $X = \mathbb{R}^n$.
Рассмотрим правильный симплекс Δ^{n-1} с вершинами в точках $A_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $A_2 = (0, 1, \dots, 0)$,..., $A_n = (0, 0, \dots, 1)$ и назовем его стандартным. Так же заметим, что $\forall i \neq j \quad | A_i A_j | = \sqrt{2}$. Затянем вершины нашего симплекса минимальным деревом Штейнера. Оказывается, что уже для небольших размерностей ($n \geqslant 3$) существует несколько таких деревьев. Задача заключается в нахождении дерева с минимальной длиной.

В докладе будет рассказано о результатах, полученных автором в этом направлении. Выяснилось, что при определенных размерностях объемлющего пространства $n = 2^k, 3 \cdot 2^k, 5 \cdot 2^k$ легко вычисляются длины сетей с "фрактальной структурой", что позволяет сравнивать длины сетей в некоторых случаях. Исходя из этих результатов будет сформулирована и доказана

Теорема 1. *Пусть Δ^n — стандартный n-мерный симплекс, где $n = 2^{k+1}, 3 \cdot 2^k, 5 \cdot 2^k$. Тогда длина сети Штейнера с "фрактальной структурой", затягивающей вершины симпекса вычисляется по формуле:*

$$L_k = a \cdot 2^k + \frac{b}{(\sqrt{2})^k},$$

где a и b различны для различных n.

Литература

1) *F. R. K. CHUNG, E. N. GILBERT* Steiner trees for the regular simplex.—Institute of Mathematics Academia Sinica, 1976.—C. 313–325.
2) *A. Y. Uteshev* Analytical Solution for the Generalized Fermat-Torricelli Problem.—ISt. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia, 2012.—C. 1–15.