

Эллиптический бильярд на плоскости Минковского

Научный руководитель – Фоменко Анатолий Тимофеевич

*Каргинова Екатерина Евгеньевна**Студент (специалист)*

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
 Механико-математический факультет, Кафедра теоретической механики и мехатроники,
 Москва, Россия
E-mail: virus_kat_@mail.ru

Пространством Минковского называется \mathbf{R}^n со скалярным произведением $(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_{n-1}y_{n-1} - x_ny_n$.

Исследованию топологии слоений Лиувилля бильярдной задачи в пространстве Минковского посвящено несколько работ В. Драгович и М. Раднович.

Рассмотрим на плоскости Минковского эллипс E , задаваемый следующим соотношением

$$E: \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$$

Здесь $a > b > 0$ - вещественные числа. Софокусное семейство коник C_λ зададим уравнением

$$C_\lambda: \frac{x^2}{a - \lambda} + \frac{y^2}{b + \lambda} = 1$$

Данное семейство изображено на рисунке 1.

Рассмотрим бильярд в эллипсе E . Для пространства Минковского существует аналог теоремы Якоби-Шаля (доказательство которого можно найти в [3]), согласно которому бильярдные траектории обладают каустическим свойством: прямые, являющиеся продолжениями отрезков фиксированной траектории, касаются одной и той же софокусной коники семейства C_λ . Отсюда следует что λ - параметр коники - является первым интегралом. Кроме того, при бильярдном движении сохраняется евклидова длина вектора скорости, поэтому $v_1^2 + v_2^2$ - ещё один первый интеграл. Эти функции находятся в инволюции относительно стандартной симплектической структуры, что влечёт интегрируемость по Лиувиллю данной системы.

В. Драгович и М. Раднович применили метод Фоменко-Цишанга для описания топологии слоения Лиувилля для бильярда в эллипсе на плоскости Минковского. Этот метод заключается в нахождении графа с метками, который является инвариантом интегрируемой системы и полностью определяет топологический тип его слоения Лиувилля. Данный подход подробно изложен в [1].

Ограничивая систему на поверхность уровня первого интеграла $v_1^2 + v_2^2$, получим трёхмерное многообразие, называемое изоэнергетической поверхностью Q^3 . В зависимости от изменения λ оно расслаивается на двумерные поверхности.

Утверждение 1. ([2]) В. Драгович. М. Раднович. Топология слоения Лиувилля бильярда в эллипсе E описывается инвариантом Фоменко-Цишанга, изображенным на рисунке 2.

Рассмотрим бильярды на плоскости Минковского в областях, ограниченных дугами софокусных эллипсов и гипербол семейства C_λ . В этой работе были рассмотрены бильярды в каждой из возможных областей. Поскольку первыми интегралами таких систем по-прежнему являются параметр каустики λ и евклидова длина вектора скорости $v_1^2 + v_2^2$,

можно построить для каждой из них молекулу, являющуюся грубым инвариантом Фоменко.

Утверждение 2. В таблице 1 приведены молекулы, являющиеся грубыми инвариантами Фоменко для каждого типа областей, описывающие грубую топологию слоения Лиувилля.

Источники и литература

- 1) Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Ижевск НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 1999. Т. 1.
- 2) Драгович В., Раднович М. Топологические инварианты эллиптических бильярдов и геодезических потоков эллипсоидов в пространстве Минковского // *Фундаментальная и прикладная математика*, 2015, Т. 20(2), С. 51-64
- 3) Khesin В., Tabachnikov S. Pseudo-Riemannian geodesics and billiards // *Advances in Mathematics*, 2009, Vol. 221(4), P. 1364-1396.

Иллюстрации

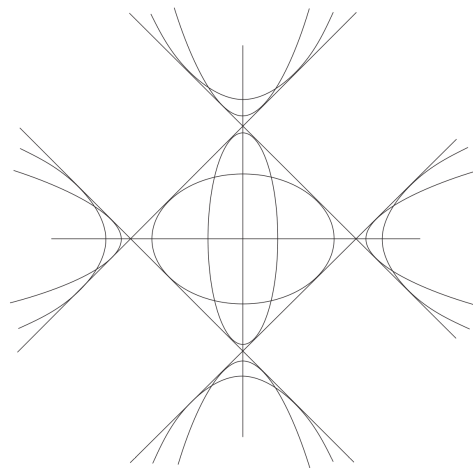


Рис. 1. Рис. 1: Семейство софокусных коник C_λ на плоскости Минковского

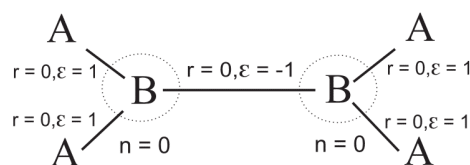


Рис. 2. Рис. 2: Инвариант Фоменко-Цишанга для эллиптического бильярда на плоскости Минковского

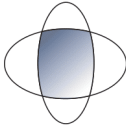
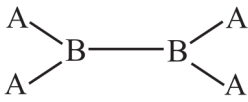
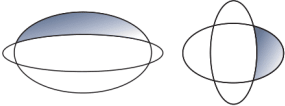
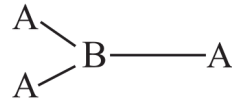

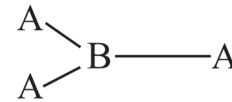
Название области	Вид области	Грубая молекула Фоменко
Ψ_1		
Ψ_2		
Ψ_3		

Рис. 3. Таблица 1: Грубые молекулы, описывающие билиардное движение в указанных областях.