

О классификации особенностей, эквивариантно простых относительно представлений циклических групп простого порядка

Научный руководитель – Гусейн-Заде Сабир Меджидович

Асташов Евгений Александрович

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей геометрии и топологии, Москва,
Россия

E-mail: ast-ea@yandex.ru

Пусть заданы представления абелевой группы G на \mathbb{C}^n и на \mathbb{C} . Функция $g: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ называется эквивариантной относительно пары заданных представлений, если для любых $\lambda \in G$, $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ имеет место равенство $g(\lambda \cdot \mathbf{z}) = \lambda \cdot g(\mathbf{z})$. Это понятие естественным образом переносится на ростки функций, а также на ростки диффеоморфизмов $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$.

Группа эквивариантных ростков диффеоморфизмов $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ действует на множество эквивариантных ростков голоморфных функций $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$. Эквивариантный росток функции $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ с критической точкой $0 \in \mathbb{C}^n$ назовем эквивариантно простым относительно заданных представлений группы G , если при всех достаточно больших $r \in \mathbb{N}$ достаточно малая окрестность некоторой (а значит, и любой) точки его орбиты в пространстве r -струй эквивариантных ростков функций $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ пересекается лишь с конечным числом других орбит.

Два эквивариантных ростка $f, g: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ с критической точкой $0 \in \mathbb{C}^n$ назовем эквивариантно правоэквивалентными, если существует эквивариантный росток диффеоморфизма $\Phi: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$, для которого $g = f \circ \Phi$. Существует общая задача классификации с точностью до такой эквивалентности особых ростков функций $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$, эквивариантно простых относительно различных представлений абелевых групп на \mathbb{C}^n и \mathbb{C} .

Перечислим некоторые известные работы, в которых рассматривались близкие по своей постановке задачи.

В работе [1] дается хорошо известная классификация простых особенностей (ADE -особенности) без учета свойств эквивариантности. Можно рассматривать этот результат как решение общей задачи в случае, когда оба заданных действия группы G тривиальны.

В работе [2] дается классификация простых особенностей на многообразии с краем. Эта классификация эквивалентна классификации простых особенностей, инвариантных относительно действия группы \mathbb{Z}_2 на \mathbb{C}^n по одной из координат. Можно рассматривать этот результат как решение общей задачи в случае, когда заданное действие группы на \mathbb{C} тривиально.

В работе [3] дается классификация простых нечетных особенностей, то есть особенностей, эквивариантных относительно нетривиальных скалярных действий группы \mathbb{Z}_2 на \mathbb{C}^n и на \mathbb{C} . В частности, доказано, что при $n \geq 3$ таких особенностей не существует вовсе.

В работе [4] доказано, что в случае, когда действие группы \mathbb{Z}_m ($m \geq 3$) по каждой переменной в \mathbb{C}^n совпадает с действием на \mathbb{C} , эквивариантно простых ростков $(\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ не существует. В этой же работе доказано, что в случае несогласованных скалярных действий группы \mathbb{Z}_3 на \mathbb{C}^2 и \mathbb{C} ; всякий эквивариантно простой росток эквивалентен одному из ростков A_{3k+1} , $k \geq 0$.

В работе [5] получена классификация эквивариантно простых ростков в случае, когда действие группы \mathbb{Z}_3 на \mathbb{C}^2 нетривиально по обоим переменным и не скалярно.

В ходе доклада будет рассказано о некоторых новых классификационных результатах для случая действий некоторых циклических групп простого порядка.

Источники и литература

- 1) В. И. Арнольд. Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля A_k, D_k, E_k и лагранжевы особенности. Функциональный анализ и его прил., т. 6, вып. 4 (1972), 3-25.
- 2) В. И. Арнольд. Критические точки функций на многообразии с краем, простые группы Ли B_k, C_k, F_4 и особенности эволют. УМН, т. 33, вып. 5 (1978), 91-107.
- 3) W. Domitrz, M. Manoel, P. de M. Rios. The Wigner caustic on shell and singularities of odd functions. J. of Geometry and Physics, 71 (2013), 58-72.
- 4) Е. А. Асташов. О классификации особенностей, эквивариантно простых относительно представлений циклических групп. Вестник Удмуртского университета. Серия "Математика. Механика. Компьютерные науки", т. 26, вып. 2 (2016), 155-159.
- 5) Е. А. Асташов. О классификации ростков функций двух переменных, эквивариантно простых относительно действий циклической группы порядка три. Вестник Самарского университета. Естественно-научная серия, вып. 3-4 (2016), 7-13.