О множествах, свободных от решений линейных уравнений

Вершинин Александр Леонидович

Студент

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: alexver_cska@mail.ru

Множество A называется свободным от сумм (сокращенно МСС), если $A \cap (A + A) = \varnothing$. Понятие множества, свободного от сумм, ввел Исай Шур. Вопрос о числе множеств, свободных от сумм, стал интенсивно изучаться после опубликования работы Камерона и Эрдёша [3]. Обзор полученных результатов представлен в [1]. Также рассматривались множества, свободные от решений любых уравнений с единичными коэффициентами [2]. Через $SF_{k,l;m}(\mathbb{Z}_p)$ обозначим семейство множеств, свободных от решений уравнения $kx + ly = mz$ в поле вычетов по простому модулю. Аналогично введем семейство арифметических прогрессий $PF_{k,l;m}(\mathbb{Z}_p)$ и положим $\lambda_{k,l;m}(\mathbb{Z}_p) = \max_{A \in SF_{k,l;m}(\mathbb{Z}_p)} |A|$, $\alpha_{k,l;m}(\mathbb{Z}_p) = \max_{A \in PF_{k,l;m}(\mathbb{Z}_p)} |A|$. В дальнейшем предполагается, что $k + l \neq m$, а p — простое.

Расширением множества $A \subseteq \mathbb{Z}_p$ называется множество B вида $B = x * A = \{xy : y \in A\}$, $x \in \mathbb{Z}_p$. Множество A называется $(2+1)$-суммой, если существует множество B такое, что $A = 2 * B + B$. Семейство всех $(2+1)$-сумм в $\mathbb{Z}_p$ обозначим через $SS_{2+1}(\mathbb{Z}_p)$.

В работе были получены следующие результаты.

Теорема 1. $\lambda_{k,l;0}(\mathbb{Z}_p) = \lfloor w/2 \rfloor \cdot (p-1)/w$,

$$|SF_{k,l;0}(\mathbb{Z}_p)| = \begin{cases} \left(\left(2^{-1}(3-\sqrt{5})\right)^{\frac{w}{2}} + \left(2^{-1}(3+\sqrt{5})\right)^{\frac{w}{2}}\right)^{\frac{p-1}{w}}, w \equiv 0 (mod\ 2) \\ \Big(2^{-\lfloor \frac{w}{2} \rfloor - 1}\Big((1-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})^{\lfloor \frac{w}{2} \rfloor} + \\ \qquad + (1+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})^{\lfloor \frac{w}{2} \rfloor}\Big)\Big)^{\frac{p-1}{w}}, w \equiv 1 (mod\ 2) \end{cases}$$

где w — порядок элемента $-l^{-1}k$ в мультипликативной группе $\mathbb{Z}_p^{\times}$.

Теорема 2. $\lfloor (p+1)/3 \rfloor \geq \lambda_{k,l;m}(\mathbb{Z}_p) \geq \alpha_{k,l;m}(\mathbb{Z}_p) \geq \lfloor (p-2)/(k+l+m) \rfloor + 1$.

Для $p > (k+l)^2$ справедливо $\alpha_{k,l;1}(\mathbb{Z}_p) \leq \lfloor (p-2)/(k+l+1) \rfloor + 1$.

Теорема 3. $|SF_{k,1;1}(\mathbb{Z}_p)| \leq 2^{(p-1)(1/2+o(1))}$.

Теорема 4. *$|SS_{2+1}(\mathbb{Z}_p)| \geq Cp2^{p/5}$, где C — положительная константа.*

Литература

1. Сапоженко А. А. О числе множеств, свободных от сумм // Ученые записки Казанского государственного университета. Серия Физико-математические науки. Том 151. № 2. 2009. С. 139-146.
2. Саргсян В. Г. Асимптотика логарифма числа множеств, (k, l)-свободных от сумм, в группах простого порядка // Вестник Московского Университета, сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2012. № 2. С. 44-51.
3. Cameron P., Erdös P. On the number of sets of integers with various properties // Number Theory (R.A. Mollin, ed.). Walter de Gruyter. Berlin. 1990. P. 61–79.