Тестирование и подбор параметров метода осреднения для волнового уравнения

Караева Дария Александровна,
Караев Александр Дмитриевич
Студенты
Московский физико-технический институт, Москва, Россия
E-mail: dariandr95@gmail.com, sashakaraev@gmail.com

В отсутствие вихревых движений распространение длинных волн в океане описывается в линеаризованном приближении теории мелкой воды волновым уравнением

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \mathrm{div}(c^2(x)\nabla u) = 0 \tag{1}$$

для возвышения $u(x,t)$ свободной поверхности, где $c^2(x) = gH(x)$, g — ускорение свободного падения, $H(x)$ — глубина океана.

Реальный профиль дна задается хаотически меняющейся функцией, что затрудняет решение уравнения как численными, так и асимптотическими методами. Хорошо известны (см., например, [1,2]) способы упрощения такого рода задач с помощью метода осреднения в случаях, когда коэффициенты уравнения являются периодическими функциями от «быстрых» переменных. В работе [3] был предложен метод, позволяющий при определенных условиях осреднить задачу, не предполагая периодичности коэффициентов. Такое упрощение обеспечивает в дальнейшем ускорение численного решения задачи Коши, а также в некоторых случаях позволяет найти асимптотическое решение, хорошо согласующееся с решением исходной задачи.

В простейшем случае метод осреднения для волнового уравнения (1) сводится к замене коэффициента $c^2(x)$ на усредненное значение

$$\overline{c^2}(x_1,x_2) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(\xi_1,\xi_2)c^2(x_1+\epsilon\xi_1, x_2+\epsilon\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2, \tag{2}$$

где ядро усреднения (порядка n) удовлетворяет условиям

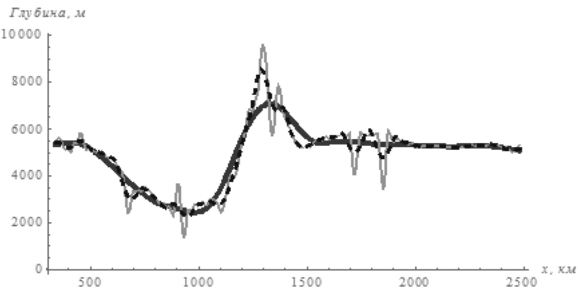
$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(x)x^k\,dx = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & 0<k\le n. \end{cases} \tag{3}$$

Целью данной работы является тестирование предложенного в [3] метода и, в частности, подбор малого параметра ϵ в формуле (2), обеспечивающего, с одной стороны, хорошую согласованность решений исходной и осредненной задачи и, с другой стороны, достаточно плавный профиль дна, полученного в результате усреднения. Для тестирования использовались данные батиметрии некоторых участков мирового океана, где в последние десятилетия наблюдались катастрофические цунами.

Авторы признательны своему научному руководителю В.Е. Назайкинскому за постановку задачи и ценные советы.

Работа поддержана грантом РФФИ.

Иллюстрации



Батиметрия на отрезке $(24.6°, 137.8°)$–$(41.4°, 149.3°)$. Светлой непрерывной линией отмечена реальная глубина. Темной и пунктирной линиями – усреднение глубины для $\epsilon = 0.12$ и $\epsilon = 0.03$

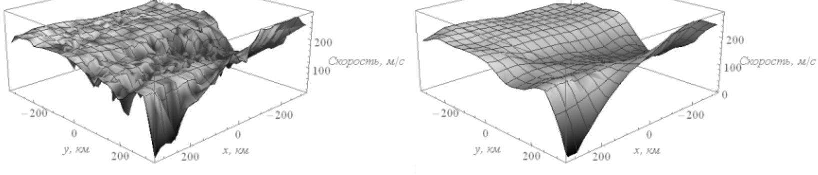


График $c(x)$ в в прямоугольнике с координатами $(33.5°, 134.6°)$–$(26.3°, 143.0°)$ вблизи побережья Японии и график усредненного значения $\overline{c}(x)$ при $\epsilon = 0.01$

Литература

1. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
2. Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. Усреднение дифференциальных операторов. М.: Физико-математическая литература, 1993.
3. Доброхотов С. Ю., Назайкинский В. Е., Тироцци Б. О методе осреднения для дифференциальных операторов с осциллирующими коэффициентами // Доклады Академии наук. 2015. Т. 461, № 5. С. 516–520.