Секция «Геометрия и топология»

Первое собственное число задачи Робена для областей в $\mathbb{R}^n$

Научный руководитель – Мохов Олег Иванович

Викулова Анастасия Вадимовна
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей геометрии и топологии, Москва, Россия
E-mail: vikulovaav@gmail.com

Оценки k-го собственного значения $\lambda = \lambda_k(\Omega)$ оператора Лапласа $-\Delta u = \lambda u$ в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ представляют значительный интерес. Этот вопрос интенсивно изучается математиками и физиками с давних времен, во всяком случае с "Теории звука" Рэлея(см.[1]). Первоначально внимание было уделено краевым условиям первого (задача Дирихле) и второго рода (задача Неймана). Было доказано, что первое собственное число минимизируется для задачи Дирихле (см.[4] и [5]) и максимизируется для задачи Неймана (см.[6] и [7]) на шаре среди областей с фиксированным объемом. Что же касается третьего краевого условия $\frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u = 0$, где ν - внешняя нормаль к $\partial\Omega$, называемого также условием Робена (в честь французского математика Victor Robin (1855-1897)), то основные работы на эту тему появились сравнительно недавно. Pedro Freitas и David Krejcirik доказали, что первое собственное число задачи Робена максимизируется на диске среди областей с фиксированным периметром на плоскости при $\alpha \leq 0$ (см.[2] и [3]). В докладе обсуждается гипотеза о том, что шар максимизирует первое собственное число задачи Робена при $\alpha \leq 0$ среди областей в $\mathbb{R}^n$ с фиксированным объемом границы. То есть $\lambda_1^\alpha(\Omega) \leq \lambda_1^\alpha(B)$ при $|Vol_{n-1}(\partial B)| = |Vol_{n-1}(\partial\Omega)|$. Будет доказана справедливость этой гипотезы для областей в $\mathbb{R}^3$ в случае, когда граница диффеоморфна сфере и для областей в $\mathbb{R}^n$ для произвольного n при некоторых ограничениях на среднюю кривизну границы.

Источники и литература

1) J.W.S. Rayleight, *The theory of sound*, Macmillan , (1877)
2) Pedro R.S.Antunes, P. Freitas and D. Krejcirik, *Bounds and extremal domains for Robin eigenvalues with negative boundary parameter*, arXiv:1605.08161v1
3) P. Freitas and D. Krejcirik, *The first Robin eigenvalue with negative boundary parameter*, arXiv:1403.6666v2
4) G. Faber, *Beweis dass unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton gibt*, Sitz. bayer. Akad. Wiss. (1923), 169-172
5) E. Krahn, *Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises*, Math. Ann. **94** (1924), 97-100
6) G. Szegö, *Inequalities for certain eigenvalues of a membrane of given area*, J.Rational Mech.Anal. **3** (1954), 343-356
7) H.F. Weinberger, *An isoperimetric inequality for the N-dimensional free membrane problem*, J.Rational Mech.Anal. **5** (1956), 633-636