Дифференциальные уравнения, классифицирующие операторы Дункла на вещественной прямой

Политов Кирилл Олегович

аспирант

ГОУ ВО МО ГСГУ, Коломна, Россия

E-mail: mr.politov.k@gmail.com

***Научный руководитель** — Хэкало Сергей Павлович*

Пусть $x \in \mathbb{R}$, $\frac{d}{dx}$ – оператор дифференцирования на $\mathbb{R}$, s – оператор отражения на $\mathbb{R}$ $(sf(x) = f(-x))$, φ – оператор умножения на достаточно гладкую четную или нечетную функцию.

В работе [1] осуществлены попытки классификации обыкновенного дифференциально-разностного оператора Дункла

$$\nabla_\varphi = \frac{d}{dx} - (\log|\varphi(\mathrm{x})|)' \, s \tag{1}$$

на основе его сплетения с оператором дифференцирования

$$\nabla_\varphi V = V \frac{d}{dx}. \tag{2}$$

Здесь V – некоторый линейный дифференциально-разностный оператор, допускающий сплетение (2) в алгебре Чередника $A = \left\langle 1, x, \frac{d}{dx}, s \right\rangle$.

В [2] эта задача обобщается на случай алгебры (псевдоалгебры) Чередника $A^* = \left\langle A, \frac{d^{-1}}{dx^{-1}} \right\rangle$, где $\frac{d^{-1}}{dx^{-1}}$ - псевдо-дифференциальный оператор, обратный к $\frac{d}{dx}$.

Проблема классификации сводится к решению специальной системы дифференциально-разностных уравнений на коэффициенты оператора V и функцию φ. В частности, достаточно чтобы функция φ удовлетворяла совокупности четырех нелинейных дифференциальных уравнений

$$\left[\begin{array}{l} (\log|\,(\log|\varphi(\mathrm{x})|)'\,|)'' - \left[(\log|\varphi(\mathrm{x})|)'\right]^2 = 0, \\ \varphi'''\,\varphi'\,\varphi - (\varphi'')^2\,\varphi - \varphi''\,(\varphi')^2 + 4\varphi''\,\varphi = 0, \\ \varphi'''\,\varphi'\,\varphi - (\varphi'')^2\,\varphi - \varphi''\,(\varphi')^2 + 2\varphi''\,\varphi - 2\varphi''\,\varphi^3 + 4(\varphi')^2\,\varphi^2 = 0, \\ \varphi'''\,\varphi'\,\varphi - (\varphi'')^2\,\varphi - \varphi''\,(\varphi')^2 + 2\varphi''\,\varphi + 2\varphi''\,\varphi^3 - 4(\varphi')^2\,\varphi^2 = 0. \end{array}\right. \tag{3}$$

Совокупность (3) фактически классифицируют операторы вида (1) как рациональные, гиперболические, тригонометрические и их комбинации. Например,

$$\varphi = x;\ \varphi = \tan\frac{x}{2};\ \varphi = \tanh\frac{x}{2}; \varphi = \frac{2x}{\tanh x} - 2.$$

Литература

[1] Мещеряков В. В, Хэкало С. П. Дифференциально-разностные операторы Дункла и их интегрируемость. В сборнике: Дифференциальные уравнения и смежные вопросы материалы V научной конференции молодых ученых Москвы и Коломны. Ответственный редактор: О. Н. Бирюков, 2013. С. 51–54.

[2] Политов К. О. Сплетение обыкновенного оператора Дункла с оператором дифференцирования в псевдоалгебре Чередника/ В сборнике: Воронежский государственный университет: Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова : Математический институт им. В. А. Стеклова РАН. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2017. С. 158–160.