Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Крейновское расширение дифференциального оператора чётного порядка

Научный руководитель – Маламуд Марк Михайлович

Грановский Ярослав Игоревич
Сотрудник
Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк, Украина
E-mail: yarvodoley@mail.ru

Пусть A — самосопряжённый неотрицательный симметрический оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Хорошо известно, что оператор A имеет самосопряжённые расширения с сохранением нижней границы (см. [2]). Во множестве $\mathrm{Ext}_A(0,\infty)$ всех неотрицательных самосопряжённых расширений оператора A существуют два «экстремальных»: фридрихсово $\widehat{A}_F$ (жёсткое) и крейновское $\widehat{A}_K$ (мягкое), выделяемые неравенствами:

$$\left(\widehat{A}_F + x\right)^{-1} \leq \left(\widetilde{A} + x\right)^{-1} \leq \left(\widehat{A}_K + x\right)^{-1}, \quad \widetilde{A} \in \mathrm{Ext}_A(0,\infty), \quad x \in (0,\infty).$$

Описание фридрихсова расширения $\widehat{A}_F$ хорошо известно для многих граничных задач. Так, для обыкновенных дифференциальных операторов на конечном промежутке и полуоси фридрихсово расширение порождается задачей Дирихле. Описание крейновского расширения в терминах граничных условий значительно труднее. В случае $A > \varepsilon I > 0$ М. Г. Крейном показано [2], что $\widehat{A}_K = A^* \upharpoonright (\mathrm{dom}\, A \dotplus \ker A^*)$. В случае оператора с нулевой нижней гранью расширение $\widehat{A}_K$ впервые описано в терминах абстрактных граничных условий в [4]. Именно, там показано, что

$$\widehat{A}_K = \{f \in A^* : \Gamma_1 f = M(0)\Gamma_0 f\},$$

где $M(0) = M(0-)$ — предельное значение функции Вейля в нуле.

Также задача явного нахождения $M(0)$ решена для операторов Бесселя (см. [3]) и $Ay = (-1)^n y^{(2n)}$ в $L^2(\mathbb{R}_+)$ (см. [5]).

В данном сообщении обсуждается описание крейновского расширения минимального оператора $A := A_{\min}$, ассоциированного с выражением

$$\mathcal{A} := (-1)^n \cdot \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}, \quad \mathrm{dom}\, A = W_0^{2n,2}[a,b], \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

в терминах граничных условий.

Пусть A — минимальный оператор, определённый в $\mathfrak{H} = L^2[a,b], -\infty < a < b < \infty$ дифференциальным выражением (1). Граничную тройку для $A^* := A_{\max}$ можно выбрать следующим образом:

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^{2n}, \quad \Gamma_0 f = \begin{pmatrix} f(a) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(a) \\ f(b) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(b) \end{pmatrix}, \quad \Gamma_1 f = \begin{pmatrix} (-1)^{n-1} f^{(2n-1)}(a) \\ \vdots \\ f^{(n)}(a) \\ (-1)^n f^{(2n-1)}(b) \\ \vdots \\ -f^{(n)}(b) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Следующая теорема — основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть A — минимальный оператор, определённый выражением (1). Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ — граничная тройка для A^*, определённая соотношениями (2). Тогда:*

(i) Крейновское расширение $\widehat{A}_K$ задаётся выражением (1) на области:

$$\operatorname{dom} \widehat{A}_K = \left\{ f \in W^{2n,2}[a,b] : \begin{pmatrix} f^{(2n-1)}(b) \\ \vdots \\ f(b) \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} f^{(2n-1)}(a) \\ \vdots \\ f(a) \end{pmatrix} \right\},$$

где T — тёплицева нижнетреугольная матрица:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \dots & & \mathbf{0} \\ b-a & 1 & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{(b-a)^{2n-1}}{(2n-1)!} & \frac{(b-a)^{2n-2}}{(2n-2)!} & \dots \;\; b-a & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}.$$

(ii) Крейновское расширение $\widehat{A}_K$ задаётся соотношениями:

$$\operatorname{dom} \widehat{A}_K = \left\{ f \in W^{2n,2}[a,b] : \Gamma_1 f = B_K \Gamma_0 f \right\},$$

в которых

$$B_K = \begin{pmatrix} QT_2^{-1}T_1S & -QT_2^{-1}S \\ -QT_1T_2^{-1}T_1S & QT_1T_2^{-1}S \end{pmatrix},$$

и T_1, T_2, Q, S — матрицы размера $n \times n$ вида:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & \dots & & \mathbf{0} \\ b-a & 1 & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{(b-a)^{n-2}}{(n-2)!} & \dots \;\; b-a & 1 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} \frac{(b-a)^{n}}{n!} & \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} & \dots & b-a \\ \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} & \frac{(b-a)^{n}}{n!} & \dots & \frac{(b-a)^{2}}{2!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{(b-a)^{2n-1}}{(2n-1)!} & \frac{(b-a)^{2n-2}}{(2n-2)!} & \dots & \frac{(b-a)^{n}}{n!} \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} (-1)^n & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & -1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что матрица B_K является самосопряжённой, т.е. $B_K = B_K^*$.

Предложение 1. *Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ — граничная тройка для A^*, задаваемая соотношениями (2), и $M(\cdot)$ — соответствующая функция Вейля. Тогда $B_K = M(0) = B_K^*$.*

Доклад основан на работе [1].

Источники и литература

1) Грановский Я. И., Оридорога Л. Л. Крейновское расширение дифференциального оператора чётного порядка // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54, № 4. С. 556–560.
2) Крейн М. Г. Теория самосопряжённых расширений полуограниченных эрмитовых операторов и её приложения. I // Мат. сб. 1947. № 20. С. 431–495.
3) Ananieva A. Yu., Budyika V. S. To the spectral theory of the Bessel operator on finite interval and half-line // J. of Math. Scien. 2015. V. 211, № 5. P. 624–645.
4) Derkach V. A., Malamud M. M. Generalized rezolvent and the boundary value problems for Hermitian operators with gaps // J. Funct. Anal. 1991. V. 95, № 1. P. 1–95.
5) Lunyov A. A. Spectral functions of the simplest even order ordinary differential operator // Methods of Functional Analysis and Topology. 2013. V. 19, № 4. P. 319–326.