Неравномерные оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме

Габдуллин Руслан Айдарович,
Макаренко Владимир Александрович

Аспирант, Аспирант

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: ruslixag@gmail.com, vlamakarenko@gmail.com

Научный руководитель — *Шевцова Ирина Геннадьевна*

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — независимые случайные величины (с.в.), с.в. X_k имеет функцию распределения (ф.р.) $F_k(x)$, $\mathsf{E}X_k = 0$, $\mathsf{E}X_k^2 = \sigma_k^2$, $\mathsf{E}|X_k|^{2+\delta} = \beta_k^{2+\delta} < \infty$, $\delta \in (0,1]$, для всех $k \in \mathbb{N}$.

Обозначим $B_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2, S_n = B_n^{-1}\sum_{k=1}^n X_k$, пусть $\overline{F}_n(x)$ — ф.р. с.в. S_n, $\Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^x e^{-t^2/2}dt$.

Рассмотрим расстояние между функциями распределения $\Delta_n(x) = \left|\overline{F}_n(x) - \Phi(x)\right|$, $x \in \mathbb{R}$, а также равномерное расстояние Колмогорова $\Delta_n = \sup\limits_x \Delta_n(x)$.

Знаменитая теорема Ляпунова [1] гласит, что $\Delta_n \to 0$, если *дробь Ляпунова* стремится к нулю:

$$L_n^{2+\delta} := \frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^n \beta_k^{2+\delta} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Оценкой скорости сходимости в теореме Ляпунова является известное неравенство Берри–Эссеена:

$$\Delta_n \leqslant C_0(\delta) \cdot L_n^{2+\delta}, \quad \delta \in (0,1].$$

При $\delta = 1$ в случае одинаково распределенных случайных величин (о.р.с.в.) неравенство Берри–Эссеена принимает вид

$$\Delta_n \leqslant \frac{C_0(1)}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\beta_1^3}{\sigma_1^3}, \text{ где } C_0(1) \leqslant 0.4690.$$

Заметим, что неравенство Берри–Эссеена устанавливает *равномерную по x* оценку скорости сходимости $\overline{F}_n(x)$ к $\Phi(x)$. Но в силу того, что $\overline{F}_n(x)$ и $\Phi(x)$ являются функциями распределения, должно выполняться соотношение $\Delta_n(x) \to 0$, $|x| \to \infty$. В равномерных оценках этот факт не учитывается.

Этого недостатка лишен результат, полученный Нагаевым [2] (для случая о.р.с.в. и при $\delta = 1$) и Бикялисом [3] (для общего случая и при $0 < \delta \leqslant 1$):

$$\sup_x (1 + |x|^{2+\delta})\Delta_n(x) \leqslant C(\delta) L_n^{2+\delta}. \tag{1}$$

Значение функции $C(\delta)$ впервые было оценено Падитцем для разнораспределенных случайных величин (р.р.с.в.). В частности, первая полученная им в 1978 году оценка $C(1) \leqslant 1955$. Позже Падитц уточнил её до $C(1) \leqslant 114.7$. В работе Михеля (1981) была получена оценка $C(1) \leqslant C_0(1) + 8(1 + e) \leq 30.2247$ для о.р.с.в. Улучшению верхних оценкок функции $C(\delta)$ были посвящены работы Тысиака (1983), Мирахмедова и Падитца (1984–1989), Нефедовой, Шевцовой, Григорьевой и Попова (2011–2017). В частности, наилучшая известная оценка константы $C(1)$ получена в работе [3]:

$$C(1) \leqslant 21.82, \text{ для р.р.с.в.}, \quad C(1) \leqslant 17.36, \text{ для о.р.с.в.}$$

Заметим, что данные оценки существенно грубее, чем в неравенстве Берри–Эссеена, потому что они были получены из неравенства Берри–Эссеена методом усечения распределений слагаемых.

В данной работе неравенство Нагаева–Бикялиса (1) было доказано с помощью метода характеристических функций. Благодаря использованию неравномерного аналога неравенства сглаживания Правитца, а также точных оценок близости характеристических функций удалось существенно улучшить оценки функции $C(\delta)$.

Работа поддержана грантами РФФИ 19-07-01220 и РФФИ 20-31-70054.

Литература

1. A. Liapunoff, Nouvelle forme du théorème sur la limite de probabilité, Mém. Acad. Sci. St-Pétersbourg, T. 12, No. 5, 1–24 (1901).
2. Нагаев С. В. Некоторые предельные теоремы для больших уклонений. Теория вероятностей и ее применения, 1965, Т. 10, в. 2, с. 231–254.
3. Бикялис А. Оценки остаточного члена в центральной предельной теореме. Литов. матем. сб., 1966, т. 6, в. 3, с. 323–346.
4. I. G. Shevtsova, On the absolute constants in Nagaev–Bikelis–type inequalities, in: Inequalities and Extremal Problems in Probability and Statistics, I. Pinelis (ed.), Elsevier, London, (2017), pp. 47–102.
5. I. Pinelis, On the nonuniform Berry–Esseen bound, arXiv:1301.2828 (2013).