

**О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ОСОБЫХ ТОЧЕК СЛАБОГО  
РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ  
ДИРИХЛЕ С РАЗРЫВНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ**

*Боговский Антон Михайлович*

*Аспирант*

*Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*

*E-mail: abogovski@gmail.com*

*Научный руководитель — д.ф.-м.н. профессор Денисов В. Н.*

Настоящая работа продолжает начатые в [1] исследования эффекта взаимодействия особенностей слабого решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения в дивергентной форме с разрывным скалярным кусочно-постоянным коэффициентом  $\varkappa > 0$  в функциональном классе  $L_p^1$ -решений с первыми производными из  $L_p$  во всей шкале значений показателя  $p \in (1, \infty)$ . В отличие от [1] теперь рассматривается случай кусочной  $C^1$ -гладкости разрывного коэффициента  $\varkappa$  и допускаются точки излома его линий разрыва.

Как и в [1] особые точки  $\partial\Omega$ , т. е. точки негладкости, предполагаются угловыми с ненулевыми углами, а линии разрыва коэффициента  $\varkappa$  предполагаются  $C^1$ -гладкими и допускаются их некасательные пересечения с  $\partial\Omega$ . По-прежнему допускаются случаи вхождения в граничную точку, в том числе и угловую, любого конечного числа линий разрыва в рамках оговоренных в [1] ограничений.

Как и в [1] случай слабой постановки задачи Неймана не рассматривается. Это объясняется установленной в [2] эквивалентностью слабых  $L_p^1$ -постановок краевых задач Дирихле и Неймана для любой односвязной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , в том числе и неограниченной, но с дополнением, имеющим непустую внутренность. Разумеется, в общем случае вопросы эквивалентности или неэквивалентности слабых постановок задач Дирихле и Неймана требуют отдельного исследования и здесь не затрагиваются.

Как и в [1] рассматриваются нетривиальные слабые  $L_p^1$ -решения однородной задачи и изучается эффект взаимодействия особых точек, т. е. точек негладкости, этих решений. Сохраняя классификацию конечных и бесконечных граничных особых точек из [1], отметим, что в отличие от [1] число конечных особых точек может быть произвольным, и среди них допускаются исключавшиеся ранее точки излома линий разрыва.

Как и в [1] предполагается, что все особые точки характеризуются единственным простым собственным числом задачи Штурма–

Лиувилля  $\lambda = -\mu^2$  с параметром  $\mu \in (0, 1)$ . Установлено, что в случае, когда все особые точки являются конечными, размерность ядра рассматриваемого эллиптического оператора

$$L = \operatorname{div}(\varkappa \nabla \cdot): \mathring{L}_p^1(\Omega) \rightarrow \mathring{L}_p^{-1}(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \left( \mathring{L}_q^1(\Omega) \right)^*, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (1)$$

равна числу особых точек при  $1 < p < 2/(1 + \mu)$  и совпадает с коразмерностью замкнутой области значений оператора, сопряженного к (1), но уже с сопряженным показателем  $p > 2/(1 - \mu)$ . В случае одной единственной бесконечной особой точки результат из [1] сохраняется, т. е. размерность ядра эллиптического оператора (1) равна единице при  $p > 2/(1 - \mu)$  и совпадает с коразмерностью замкнутой области значений сопряженного к (1) оператора, но уже с сопряженным показателем  $p: 1 < p < 2/(1 + \mu)$ .

В [1] было установлено, что при одной конечной и одной бесконечной особых точках с одним и тем же параметром  $\mu \in (0, 1)$  размерности ядра и коядра оператора (1) равны нулю при  $p \neq 2/(1 \pm \mu)$ . Основным результатом настоящей работы является доказательство сохранения этого равенства в случае произвольного числа конечных особых точек при одной бесконечной, т. е. оператор (1) при  $p \neq 2/(1 \pm \mu)$  осуществляет изоморфизм  $\mathring{L}_p^1(\Omega)$  на  $\mathring{L}_p^{-1}(\Omega)$ . Последнее означает, что любое конечное число конечных особых точек при одной бесконечной с одним и тем же единственным спектральным параметром  $\mu \in (0, 1)$  гасят взаимное влияние друг друга при значениях показателя  $p \neq 2/(1 \pm \mu)$ .

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю профессору Василию Николаевичу Денисову за внимание к работе и конструктивное обсуждение подходов к решению поставленной им задачи.

### Литература

1. Боговский А. М., Денисов В. Н. О взаимодействии граничных особых точек в задаче Дирихле для эллиптического уравнения с кусочно-постоянными коэффициентами в плоской области. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т 59, № 12, С. 2155–2174.
2. В. Н. Денисов, А. М. Боговский О взаимосвязи слабых решений эллиптических краевых задач Дирихле и Неймана для плоской односвязной области // Матем. заметки. 2020. Т 107, № 1, С.32–48.