К вопросу существования положительной собственной функции в задаче о потере устойчивости колонны

Гончаров Василий Юрьевич

Старший преподаватель

МАИ (НИУ), РГУ имени А. Н. Косыгина, Москва, Россия

E-mail: fulu.happy@gmail.com

***Научный руководитель** — Муравей Леонид Андреевич*

Рассмотрим классическую задачу о потере устойчивости жестко фиксированной колонны. Пусть $d \in C^2[0,1]$ — изгибная жесткость колонны, причем $d(x) \geq d_0 > 0$, где d_0 — некоторая константа. Краевая задача на собственные значения, описывающая потерю устойчивости жестко фиксированной на обоих концах колонны, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} &(dy'')''(x) + \lambda y''(x) = 0, \qquad x \in (0,1), \\ &y(0) = y'(0) = 0, \qquad y(1) = y'(1) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь наименьшее положительное собственное значение, которое в дальнейшем будем обозначать через λ_1, отвечает критической силе, превышение которой приводит к потере устойчивости колонны. Собственная функция задачи (1), соответствующая параметру $\lambda = \lambda_1$, определяет форму искривленной колонны. Хорошо известно, что собственное значение λ_1 может быть кратным, однако его кратность не превосходит двух.

Полагая в дальнейшем, что $d \in L_\infty(0,1)$ и $d(x) \geq d_0$ для п. в. $x \in (0,1)$, будем рассматривать обобщенную постановку задачи (1), которая формулируется в виде следующего интегрального тождества:

$$\int_0^1 d(x)y''(x)z''(x)\,dx = \lambda \int_0^1 y'(x)z'(x)\,dx, \qquad z \in H_0^2(0,1). \tag{2}$$

Проблема потери устойчивости жестко фиксированной на обоих концах колонны как в классической, так и в обобщенной постановке является основой для формулировки знаменитой задачи Лагранжа о наивыгоднейшем очертании колонны, которой посвящена обширная литература. Обзоры, охватывающие основные работы по этой теме, могут быть найдены в [1–3].

В настоящем исследовании изучается вопрос о существовании в собственном подпространстве, отвечающем наименьшему положительному собственному значению λ_1, положительной на интервале $(0,1)$ собственной функции. Указанное собственное подпространство в дальнейшем будем обозначать через Y_1.

Хотя поставленный вопрос о существовании в собственном подпространстве Y_1 положительной собственной функции относится к предмету теории дифференциальных уравнений, по всей видимости, он впервые возник в прикладной работе Кокса и Овертона [3] при исследовании разрешимости вариации задачи Лагранжа с ограничениями на площадь поперечных сечений колонны в случае, когда d представляет собой симметричную на интервале $(0,1)$ функцию. В работе Караа [4] выдвигалось предположение, что при том же ограничении на функцию d возможен случай, когда собственное значение λ_1 является простым, а все отвечающие ему собственные функции являются нечетными.

Основной результат исследования заключен в следующем утверждении.

Теорема 1. *Пусть d — симметричная функция, т. е.*

$$d(x) = d(1-x), \qquad x \in (0,1).$$

Тогда в собственном подпространстве Y_1, отвечающем наименьшему положительному собственному значению λ_1 задачи (2)*, найдется положительная на интервале* $(0,1)$ *собственная функция.*

В рамках доклада также планируется привести обобщение Теоремы 1 и некоторые результаты анализа литературы, относящиеся к основному утверждению.

Литература

1. Сейранян А. П. Задача Лагранжа о наивыгоднейшем очертании колонны. Препринт № 60-2000. Институт Механики МГУ. Москва. 2000.
2. Cox S. J. The shape of the ideal column // The Mathematical Intelligencer. 1992. Vol. 14, no. 1. pp. 16–24.
3. Cox S. J., Overton M. L. On the optimal design of columns against buckling // SIAM J. Math. Anal. 1992. Vol. 23, no. 2. pp. 287–325.
4. Karaa S. Properties of the first eigenfunctions of the clamped column equation // Theoret. Appl. Mech. 2003. Vol. 30, no. 4. pp. 265–276.