Использование модифицированного алгоритма SVP для заполнения неизвестных элементов тензора

Мордвинцев Михаил Константинович

студент

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: mordvincevmisha@mail.ru

***Научный руководитель** — Тыртышников Евгений Евгеньевич*

Для многих современных проблем (например для создания рекомендательных систем коллаборативной фильтрации [2]) необходимо решать задачу дополнения матрицы - по известным значениям восстановить матрицу, имеющую заданный ранг. Одно из возможных обобщений этой задачи для случая тензора: найти тензор, совпадающий с заданным в определенном множестве индексов, чтобы он имел ранги Таккера не выше данных.

Разложением Таккера тензора X называется представление X в виде:

$$X(i_1, i_2, .., i_n) = \sum g(\alpha_1, ..., \alpha_n) u_1(i_1, \alpha_1) ... u_n(i_n, \alpha_n) \qquad (1)$$

Мощности множеств $r_1 = |\{\alpha_1\}|, ..., r_n = |\{\alpha_n\}|$ называются рангами разложения Таккера, их минимальные значения среди всех возможных разложений Таккера - рангами Таккера тензора X.

Согласно [1] для любого тензора $a(i_1, ..., i_n)$ над произвольным полем P существует минимальное разложение Таккера, для которого ранги r_k совпадают с рангами Таккера данного тензора и равны рангам матриц развертки a_k по измерениям данного тензора.

Определим задачу заполнения неизвестных значений тензора.

Пусть $P_\Omega(X) : \mathbb{R}^{m_1 \times ... \times m_n} \to \mathbb{R}^{m_1 \times ... \times m_n}$ - линейное преобразование, которое сохраняет значения X, соответствующие индексам из множества Ω. Более формально, $P_\Omega(X)_{i_1 i_2 .. i_n} = X_{i_1 i_2 .. i_n}$ при $(i_1, i_2, ..., i_n) \in \Omega$ и $P_\Omega(X)_{i_1 i_2 .. i_n} = 0$ иначе.

Тогда задачу заполнения неизвестных значений тензора $X \in \mathbb{R}^{m_1 \times ... \times m_n}$ с множеством индексов Ω, которые необходимо сохранить, и вектором натуральных чисел $l_1, ..., l_n$ можно сформулировать таким образом: найти Y такой, что $P_\Omega(Y) = P_\Omega(X)$ и $r_i \leq l_i \forall i = \overline{1, n}$, где r_i - ранги Таккера тензора Y.

Тензор Y буду считать заполненным тензором - ответом на поставленную задачу.

В [2] приводится алгоритм, называющийся SVP, решающий поставленную задачу для матриц. Обобщая его, я получил алгоритм со схожей идеей для тензоров. Ключевой идеей матричного алгоритма SVP является поиск наилучшего приближение на множестве матриц с рангом не выше заданного. В случае тензоров получение подобного приближения на множестве тензоров с рангами Таккера не выше заданных затруднительно, однако можно получить достаточно хорошее приближение с помощью ортогонального разложения Таккера. Основным моим результатом является реализация изложенной идеи в виде следующего алгоритма:

Algorithm 1: Алгоритм для дополнения тензора с маской M

Result: X
$X^0 = 0$
η_t - итерационный параметр, соответствующий шагу t
$k_1, ..., k_n$ - ранг, который мы хотим получить
M - "маска" - тензор, состоящий из 0, если элемент тензора не сохраняется, и 1, если его нужно сохранить
A - исходный тензор
while $\|M * (X^t - A)\|_F \geq \varepsilon$ **do**
  $Y^t = X^t - \eta_t * M * (X^t - A)$
  Вычисляем ортогональное разложение Таккера, производим редукцию к разложению с рангами $k_1, ..., k_n$, перемножаем элементы разложения, получаем тензор Y'
  $X^{t+1} = Y'$
end

В этой работе получен следующий результат: при выборе Ω по схеме Бернулли с плотностью p выше некоторой константы и при выполнении некоторых ограничений на исходный тензор, алгоритм сходится с вероятностью не менее $(1-\exp(-r\log r))^d$, где r - меньшее измерение тензора, d - количество измерений.

Литература

1. Тыртышников Е. Е. Матрицы, тензоры, вычисления //М.: МГУ им. МВ Ломоносова. – 2013.
2. Jain P., Meka R., Dhillon I. S. Guaranteed rank minimization via singular value projection //Advances in Neural Information Processing Systems. – 2010. – С. 937-945.