Оценка функции Грина задачи Коши для одного дифференциального оператора второго порядка с инволюцией

Иоффе Виталия Леонидовна

Студент

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: `vitaioffe@yandex.ru`

***Научный руководитель** — Крицков Леонид Владимирович*

Исследованию задач для дифференциальных операторов с инволюцией уделяется в последнее время все большее внимание (см., например, [1]). Интерес к ним вызван как имеющимися приложениями, так и их специфическими спектральными свойствами [2].

В данной работе для дифференциальной операции $Lu = -u''(x) + \alpha u''(-x)$, $-1 < x < 1$, с параметром $\alpha \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ и преобразованием инволюции $\nu(x) = -x$ во втором слагаемом рассматривается задача Коши:

$$\begin{cases} Lu = \rho^2 u(x), \\ u(-1) = 0, \\ u'(-1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Задача (1) является несамосопряженной. Ее спектр не пуст и собственные значения как корни характеристического многочлена

$$\Delta(\rho) = \alpha_1 \rho \cos \alpha_0 \rho \cos \alpha_1 \rho + \alpha_0 \rho \sin \alpha_0 \rho \sin \alpha_1 \rho,$$

где $\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}, \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}$, образуют на комплексной плоскости счетное множество без конечных предельных точек, расположенное в некоторой полосе $|\operatorname{Im} \rho| \le C_0$.

В работе получены оценки функции Грина задачи (1), из которых известными методами (см. [3]) обосновывается полнота системы корневых функций этой задачи в пространстве $L_2(-1, 1)$.

Функция Грина имеет следующий вид:

$$G(x, t; \rho) = -\frac{1}{\Delta(\rho)} \Big(\alpha_0 \sin \alpha_0 \rho \sin \alpha_1 \rho x - \alpha_1 \cos \alpha_1 \rho \cos \alpha_0 \rho x \Big) \cdot$$
$$\cdot \Big(\frac{\alpha_0}{2} \sin \alpha_0 \rho \cos \alpha_0 \rho t + \frac{\alpha_1}{2} \cos \alpha_1 \rho \sin \alpha_1 \rho t \Big) - \frac{1}{\Delta(\rho)} \Big(\sin \alpha_1 \rho \cos \alpha_0 \rho x +$$
$$\cos \alpha_0 \rho \sin \alpha_1 \rho x \Big) \Big(\frac{\alpha_0^2}{2} \cos \alpha_0 \rho \cos \alpha_0 \rho t - \frac{\alpha_1^2}{2} \sin \alpha_1 \rho \sin \alpha_1 \rho t \Big) + g(x, t; \rho),$$

$$g(x,t;\rho)=\frac{1}{2\rho}\begin{cases}\alpha_0\cos\alpha_0\rho x\sin\alpha_0\rho t-\alpha_1\sin\alpha_1\rho x\cos\alpha_1\rho t,\\ -1<t<-|x|;\\ \operatorname{sgn}x(\alpha_1\sin\alpha_1\rho t\cos\alpha_1\rho x-\alpha_0\cos\alpha_0\rho t\sin\alpha_0\rho x),\\ -|x|<t<|x|;\\ -\alpha_0\cos\alpha_0\rho x\sin\alpha_0\rho t+\alpha_1\sin\alpha_1\rho x\cos\alpha_1\rho t,\\ |x|<t<1.\end{cases}$$

Теорема 1. *Для функции Грина задачи* (1) *выполнена оценка вне любой δ-окрестности спектра выполнена:*

$$|G(x,t;\rho)|\le\frac{C}{|\rho|}\exp\big\{-\min(\alpha_0,\alpha_1)|\operatorname{Im}\rho|(||t|-|x||)\big\},$$

где $x\in(-1,1)$, $t\in(-1,1)$, а константа $C>0$ зависит лишь от величины δ.

Теорема 2. *Система собственных и присоединённых функций задачи* (1) *полна в $L_2(-1,1)$ при любом $\alpha\in(-1,0)\cup(0,1)$.*

Литература

1. A. Cabada, F.A.F. Tojo. Differential Equations with Involutions, Atlantis Press, Paris, 2015.
2. Крицков Л. В., Сарсенби А. М. Базисность Рисса системы корневых функций дифференциального оператора второго порядка с инволюцией // Дифференциальные уравнения, 2017, т. 53, № 1, С. 35–48.
3. Наймарк М. А. О некоторых признаках полноты системы собственных и присоединенных векторов линейного оператора в гильбертовом пространстве // Докл. АН СССР, 1954, т. 98, №5,, С. 727–730.