Оценка максимального ранга тензоров методом разделяющих подпространств

Валиахметов Булат Ильдарович

Студент

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: valiahmetovbulat@mail.ru

Научный руководитель — *Тыртышников Евгений Евгеньевич*

В задачах современной вычислительной математики постоянно возникает необходимость хранить и обрабатывать данные в виде многомерных массивов — тензоров. Для более эффективного использования машинных ресурсов весьма полезным является применение следующих представлений тензоров:

$$T[i_1, i_2, i_3, \ldots, i_p] = \sum_{\alpha=1}^{r} u_1[i_1, \alpha] u_2[i_2, \alpha] \ldots u_p[i_p, \alpha]. \tag{1}$$

Наименьшее число слагаемых среди всех таких представлений называется *рангом тензора*. Процесс поиска разложения для произвольного тензора представляет большую сложность в силу сложности задачи поиска хотя бы минимального количества слагаемых в разложении. Из-за неустойчивости ранговой характеристики к малым возмущениям имеет смысл поиск *максимального ранга* для определённых классов тензоров.

В данной работе рассматривается максимальный ранг $3 \times 3 \times 5$ комплексных тензоров, обозначаемый $R(3,3,5)$. Из статьи [1] известны значения $R(3,3,p)$ для всех натуральных p, кроме $p = 5$, для которого есть лишь оценки: $6 \leqslant R(3,3,5) \leqslant 7$. Доказательство левой части данного неравенства приведено в [2]. В данной работе мы приведём новое доказательство нижней оценки, основанное на тесной связи трёхмерных тензоров с билинейными отображениями и *методе разделяющих подпространств*.

Пусть имеется отображение $\varphi\colon \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \mapsto \mathcal{Z}$ и его r-членное трилинейное разложение, вытекающее из (1):

$$\varphi(x, y) = \sum_{\alpha=1}^{r} f_\alpha(x) g_\alpha(y) z_\alpha, \tag{2}$$

в котором нет нулевых членов, то есть $z_\alpha \neq 0$ для всех α и нет тождественно нулевых функционалов f_α и g_α. Тройка подпространств

$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{X}, \mathcal{V} \subseteq \mathcal{Y}, \mathcal{W} \subseteq \mathcal{Z}$ называется *разделяющей* для разложения (2), если после перенумерации его слагаемых система функционалов $f_1, \ldots, f_p$ полна на $\mathcal{U}$, система $g_{p+1}, \ldots, g_{p+q}$ полна на $\mathcal{V}$ и при этом соответствующие векторы $z_1, \ldots, z_{p+q}$ не лежат в $\mathcal{W}$.

Если r-членное трилинейное разложение разделяется тройкой подпространств $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$, то можно доказать следующее неравество:

$$r \geqslant \dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{V} + \nu(\mathcal{W}),$$

где $\nu(\mathcal{W})$ — число индексов α, для которых $z_\alpha \in \mathcal{W}$. Из данного неравенства можно получать нижние оценки рангов конкретных тензоров. Остаётся лишь подбирать разделяющие тройки подпространств достаточно больших размерностей, что также представляет собой нетривиальную задачу.

В данной работе нами построена тройка подпространств

$$\mathcal{U} = \mathbb{C}^3,\ \mathcal{V} = \mathcal{L}([1,0,0]^T, [0,1,0]^T),\ \mathcal{W} = \mathcal{L}([0,1,0,0]^T),$$

которая является разделяющей для *любого* трилинейного разложения вида (2), соответствующего тензору T с сечениями: $I_{3\times3}, E_{12}, E_{13}, E_{23}, O_{3\times3}$. Далее показано, что от любого разложения (2) можно перейти к эквивалентному, в котором $\nu(\mathcal{W}) \geqslant 1$, откуда получатся требуемая оценка: $R(3,3,5) \geqslant 6$.

Литература

1. Atkinson M. D., Stephens N. M. On the Maximal Multiplicative Complexity of a Family of Billnear Forms // Linear Algebra and its Applications Volume 27, October 1979, P. 1–8.
2. Sumi T., Miyazaki M., Sakata T. About the maximal rank of 3-tensors over the real and the complex number field // Ann Inst Stat Math 62, 2010, P. 807–822.