О резольвенте оператора Дирака с периодическими краевыми условиями

Киселева Анна Викторовна

Студент

Математический факультет Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия

E-mail: anyutka.kiseleva@gmail.com

Научный руководитель — *Бурлуцкая Мария Шаукатовна*

В пространстве вектор-функций $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$ (T — знак транспонирования) с непрерывно-дифференцируемыми компонентами рассматривается оператор L, заданный дифференциальным выражением

$$(Lz)(x) = l[z](x) = Bz'(x) + Q(x)z(x),$$

где $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $Q(x) = \begin{pmatrix} 0 & q_2(x) \\ q_1(x) & 0 \end{pmatrix}$, $q_j(x) \in C[0,1]$, отвечающий периодическим краевым условиям

$$z(0) = z(1).$$

Оператор L является частным случаем оператора Дирака [1]. Спектральные вопросы для оператора L (асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций, вопросы базисности, теоремы равносходимости и др.) изучались в работах [2]–[6]. В [7] методом Фурье исследовалась смешанная задача для системы уравнений в частных производных, приводящая к системе Дирака, но с краевыми условиями типа Дирихле $z_1(0) = z_2(0)$, $z_1(1) = z_2(1)$. В задаче с периодическими условиями применение техники из [7] затруднительно, так как здесь собственные значения могут быть кратными, и нет необходимой информации о собственных функциях. Для использования в случае такой задачи подходов из [8], основанных на представлении суммы ряда Фурье через контурные интегралы от резольвенты соответствующего оператора, требуется исследование резольвент оператора L и простейшего (невозмущенного) оператора $(L^0 z)(x) = Bz'(x)$, $z(0) = z(1)$.

Легко устанавливается, что собственные значения оператора L^0 двукратны: $\lambda_n = 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$). Уточненная асимптотика для собственных значений оператора L приведена в [4, Теоремы 3, 4].

Обозначим $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$, $R^0_\lambda = (L^0 - \lambda E)^{-1}$ резольвенты операторов L и L^0 (E — единичный оператор, λ — спектральный параметр).

Теорема 1. *Для* $z = R_\lambda^0 f$, *где* $z = (z_1, z_2)^T$, $f = (f_1, f_2)^T$, *справедливы следующие формулы:*

$$z_k = z_k(x,\lambda) = \Omega_k^0(x,\lambda,f) + (M_{k\lambda}^0 f_k)(x), \quad k = 1,2, \quad \text{где}$$

$\Omega_1^0(x,\lambda,f)=\frac{e^\lambda}{1-e^\lambda}\left(e^{-\lambda t}, f_1(t)\right)e^{\lambda x}$, $\Omega_2^0(x,\lambda,f)=\frac{1}{1-e^\lambda}\left(e^{\lambda t}, f_2(t)\right)e^{-\lambda x}$, $(M_{k\lambda}^0 f_k)(x)=(-1)^{k-1}\int_0^x e^{(-1)^{k-1}\lambda(x-t)} f_k(t)\,dt$, $(f,g)=\int_0^1 f(t)g(t)\,dt$.

В докладе также будет представлена удобная для дальнейших исследований формула для резольвенты оператора L и оценки ее компонент.

Литература

1. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988.
2. Джаков П. В., Митягин Б. С. Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шредингера и Дирака // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61, № 4. С. 77–182.
3. Баскаков А. Г., Дербушев А. В., Щербаков А. О. Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом // Изв. РАН. Серия матем. 2011. Т. 75, № 3. С. 3–28.
4. Бурлуцкая М. Ш., Корнев В. В., Хромов А. П. Система Дирака с недифференцируемым потенциалом и периодическими краевыми условиями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52, № 9. С. 1621–1632.
5. Савчук А. М., Садовничая И. В. Асимптотические формулы для фундаментальных решений системы Дирака с комплекснозначным суммируемым потенциалом // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 5. С. 573–584.
6. Savchuk A. M., Shkalikov A. A. Dirac operator with complex-valued summable potential // Mathematical Notes. 2014. V. 96, № 5. P. 777–810.
7. Бурлуцкая М. Ш. Классическое и обобщенное решение смешанной задачи для системы уравнений первого порядка с непрерывным потенциалом // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2019. Т. 59, № 3. С. 380–390.
8. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Резольвентный подход для волнового уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т. 55, № 2. С. 51–63.