

**РАНДОМИЗИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ
СПЕКТРАЛЬНОГО РАЗРЕЖЕНИЯ ГРАФОВ**

Михайлов Арсений Денисович

Студент

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: sarasderas@gmail.com

Научный руководитель — Тьртъшников Евгений Евгеньевич

Разрежение графа - процесс приближения исходного графа графом с меньшим числом вершин и сохранением некоторых свойств. Эта задача широко используется в различных областях, таких как физика, машинное обучение, дискретная математика и так далее. Соответственно и слово «приближение» может пониматься совершенно по-разному, в зависимости от изначальной постановки задачи.

Для решения проблем в области линейной алгебры и спектральной теории графов вводится понятие спектрального разрежения:

Пусть имеется простой взвешенный граф $G = (V, E, w)$, $|V| = n$, $|E| = m$, $w_{(u,v)}$ - вес ребра $(u, v) \in G$. Лапласианом графа G называется:

$$L \in \mathbb{R}^{n \times n}, L = D - A, \quad (1)$$

где A - взвешенная матрица смежности G , D - диагональная матрица: $D(v, v) = \sum_z w_{(v,z)}$, $z \in G$ (если ребро (v, z) отсутствует, то его вес полагается равным 0).

Пусть $H = (V, \tilde{E}, \tilde{w})$ - подграф G , $|\tilde{E}| = \tilde{m}$, и его Лапласиан - \tilde{L} . Тогда H является *спектральным разрежителем* G (с точностью $\varepsilon > 0$), если $\tilde{m} < m$ и:

$$(1 - \varepsilon)x^T Lx \leq x^T \tilde{L}x \leq (1 + \varepsilon)x^T Lx, \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (2)$$

Причём чем меньше \tilde{m} , тем лучше.

Ориентируем все ребра графа G произвольным образом. Тогда можно составить его матрицу инцидентности:

$$B(e, v) = \begin{cases} 1, & \text{если } v - \text{начало } e \\ -1, & \text{если } v - \text{конец } e \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (3)$$

Так же введём диагональную весовую матрицу $W \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $W(e, e) = w_e$. Существует представление Лапласиана:

$$L = B^T W B = B^T W^{1/2} W^{1/2} B \quad (4)$$

На основе алгоритма RowSampleL2 из [1], был построен алгоритм спектрального разрежения графов:

Algorithm 1: GSS($G(V, E, w), \varepsilon$)

Построение $B(e, v)$
 Построение $W(e, e)$
 $C = W^{1/2} B$
 Выбор констант c, θ
 $R = d^\theta$
 $D = \text{RowSampleL2}(C, R, \varepsilon)$
return $D^T D$

Также была сформулирована и доказана теорема, гарантирующая работу алгоритма:

Теорема 1. $\tilde{L} = \text{GSS}(G(V, E, w), \varepsilon)$ с вероятностью $1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$ является спектральным разрежителем графа G с точностью ε , и имеет $O(n \log n \varepsilon^{-2})$ рёбер. Асимптотика алгоритма: $O(n^3 \varepsilon^{-2}) \approx O(m \sqrt{m} \varepsilon^{-2})$.

Было проведено сравнение **GSS** с алгоритмом **Sparsify** из [2] (один из лучших алгоритмов в области). Результаты сравнения приведены в таблице:

| Алгоритм | Время | Рёбра | p | ε |
|-----------------|--|----------------------------------|---------------------|-------------------|
| Sparsify | $\tilde{O}(m \varepsilon^{-2})$ | $9C^2 n \log n \varepsilon^{-2}$ | 1/2 | $(1/\sqrt{n}; 1]$ |
| GSS | $\tilde{O}(m \sqrt{m} \varepsilon^{-2})$ | $O(n \log n \varepsilon^{-2})$ | $1 - \sqrt{n}^{-1}$ | $(0, \infty)$ |

Литература

1. Mu Li, Gary L. Miller, Richard Peng. Iterative Row Sampling. April 5, 2013. [arXiv:1211.2713v2]
2. Daniel A. Spielman and Nikhil Srivastava. Graph sparsification by effective resistances. Proceedings of the 40th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC), pages 563–568, 2008