# Многомерная центральная предельная теорема для взвешенных сумм

***Айвазян Сагак Арамович***

*Аспирант*

*Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*

*E-mail:* ayvazyansky@yandex.ru

***Научный руководитель** — Ульянов Владимир Васильевич*

Пусть $X_1, X_2..X_n$ независимые случайные векторы в $R^k$ с конечным третьим моментом $\gamma_j^3 = \mathbb{E}\|X_j\|^3$, нулевым математическим ожиданием $\mathbb{E}X_j = \overline{0}$ и единичной коварицонной матрицей $cov(X_j) = I$ для $j = 1..n$. Обозначим $\mathfrak{B}$ —множество всех измеримых выпуклых множеств, $\Phi$ —многомерное нормальное распределение с нулевым средним и единичной матрицей ковариаций и $\gamma^3 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \gamma_j^3$. В [1] была получена оценка для скорости сходимости нормированной суммы случайных векторов к многомерному стандартному нормальному распределению в виде следующего неравенства

$$\sup_{B\in\mathfrak{B}} |P(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n X_i \in B) - \Phi(B)| \leq C(k)\frac{\gamma^3}{\sqrt{n}}, \tag{1}$$

при этом $C(k)$ зависит только от размерности $R^k$.

В одномерном случае оценка (1) оптимальна, однако Б.Клартаг и С.Содин показали, что если рассматривать взвешенные суммы вида $\sum_{i=1}^n \theta_i X_i$, где $\sum_{j=1}^n \theta_j^2 = 1$, то порядок скорости сходимости можно существенно улучшить. В [2] была доказана теорема

**Теорема 1.** *Пусть $X_1, X_2..X_n$ независимые случайные величины с конечным четвертым моментом $\delta_j^4 = \mathbb{E}|X_j|^4$ и $\mathbb{E}X_j = \overline{0}$ для $j = 1..n$. Обозначим $\delta^4 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \delta_j^4$ и $\Theta$ как случайный вектор, равномерно распределенный на единичной сфере $S^{n-1} = \{(\theta_1, \theta_2, .., \theta_n) : \sum_{j=1}^n \theta_j^2 = 1\}$. Тогда для любого $\rho > 0$ существует подмножество $\Im \subseteq S^{n-1}$ с $P(\Theta \in \Im) > 1 - \rho$ и константа $C(\rho)$ такие, что для любого $\theta = (\theta_1, .., \theta_n) \in \Im$ выполняется следующее неравенство*

$$\sup_{a,b\in R, a<b} |P(a \leq \sum_{i=1}^n \theta_i X_i \leq b) - \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{x^2}{2})dx| \leq C(\rho)\frac{\delta^4}{n}. \tag{2}$$

*При этом $C(\rho) \leq C \ln^2(\frac{1}{\rho})$, где $C$ — универсальная константа.*

Результат (2) был перенесен на многомерный случай, доказана следующая теорема

**Теорема 2.** *Пусть $X_1, X_2..X_n$ независимые случайные векторы в $R^k$ с конечным четвертым моментом $\delta_j^4 = \mathbb{E}\|X_j\|^4$, нулевым математическим ожиданием $\mathbb{E}X_j = \overline{0}$ и единичной коварициoнной матрицей $cov(X_j) = I$ для $j = 1..n$. Обозначим $\mathfrak{B}$ —множество всех выпуклых множеств, $\Phi$ —многомерное нормальное распределение с нулевым средним и единичной матрицей ковариаций, $\delta^4 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_j^4$ и $\Theta$ как случайный вектор, равномерно распределенный на единичной сфере $S^{n-1} = \{(\theta_1, \theta_2, .., \theta_n) : \sum_{j=1}^{n}\theta_j^2 = 1\}$. Тогда для любого $\rho > 0$ существует подмножество $\Im \subseteq S^{n-1}$ с $P(\Theta \in \Im) > 1 - \rho$ и константа $C(\rho, k)$ такие, что для любого $\theta = (\theta_1, .., \theta_n) \in \Im$ выполняется следующее неравенство*

$$\sup_{B\in\mathfrak{B}} |P(\sum_{i=1}^{n}\theta_i X_i \in B) - \Phi(B)| \leq C(\rho, k)\frac{\delta^4(\ln(n))^{\frac{k}{2}}}{n}.$$

*При этом $C(\rho, k) \leq C\frac{2^k k^{\frac{k}{2}+1}}{\Gamma(\frac{k}{2})}\ln^2(\frac{1}{\rho})$, где $C$ —универсальная константа.*

Таким образом, результат Б.Клартага и С.Содина был обобщен на многомерный случай, но при этом возник дополнительный логарифмический множитель. Доказательство теоремы потребовало более тщательного анализа поведения характеристической функции в области $\frac{a\sqrt{n}}{\delta^2} \leq \|\bar{t}\| \leq \frac{n}{\delta^4}$, где $a$ —константа.

## Литература

1. Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р. Апроксимация нормальным распределением и асимтотические разложения. М.: Наука, 1982.
2. Klartag B., Sodin S. Variations on the Berry–Esseen theorem, Теория вероятностей и ее применения. 2011. Т. 56, № 3. С. 514–533.