О спектральных свойствах оператора с инволюцией

Дубровина Виктория Дмитриевна

Студент

Математический факультет Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия

E-mail: vichka.dubrovina.2000@mail.ru

Научный руководитель — *Бурлуцкая Мария Шаукатовна*

Рассматривается функционально-дифференциальный оператор с инволюцией

$$(Ly)(x) = y'(1-x) + q(x)y(x), \quad y(0) = y(1),$$

с областью определения $D_L = \{y \in C^1[0,1] : y(0) = y(1)\}$.

Спектральные вопросы для дифференциальных и интегральных операторов с инволюцией активно исследуются (см., например, работы [1–7] и библиографию в них). Здесь используется техника работ [6,7], где изучены смешанные задачи для уравнений с инволютивным отклонением, которые приводят к вопросам о сходимости разложений по собственным и присоединенным функциям таких операторов.

Предполагаем, что $q(x)$ непрерывна на $[0,1]$ и комплекснозначна, а также $q(x) = q(1-x)$. Отметим, что решения спектральной задачи в случае такого симметричного потенциала дают главные части в асимптотических формулах для собственных значений и собственных функций оператора L с произвольным потенциалом (см. [6,7]). В [7] рассматривался оператор L лишь в случае вещественной $q(x)$.

Теорема 1. *Собственные значения оператора L есть:*

$$\lambda_n = a + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}), \quad a = \int\limits_0^1 q(t)dt.$$

Соответствующие собственные функции имеют вид:

$$y_n(x) = p(1-x)e^{2n\pi i(1-x)} - ip(x)e^{2n\pi ix},$$

где $p(x) = \exp\Big\{i\Big(ax - \int\limits_0^x q(t)dt\Big)\Big\}$.

Оператор L не является самосопряженным. Сопряженный оператор имеет вид $L^*z = z'(1-x) + \overline{q(x)}z(x)$, $z(0) = z(1)$, его собственные значения есть $\overline{\lambda}_n$, а собственные функции $z_n(x)$ получаются из $y_n(x)$ заменой $p(x)$ на $\widetilde{p}(x) = \exp\Big\{ i\Big(\overline{a}x - \int\limits_0^x \overline{q(t)}dt \Big) \Big\}$.

В работе устанавливается полнота в $L_2[0,1]$ систем $\{y_n(x)\}$, $\{z_n(x)\}$, исследуются вопросы сходимости рядов Фурье по данным биортогональным системам.

Литература

1. Хромов А. П. Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях // Математические заметки. 1998. Т. 64, № 6. С. 932–949.
2. Бурлуцкая М. Ш., Курдюмов В. П., Луконина А. С., Хромов А. П. Функционально-дифференциальный оператор с инволюцией // Доклады Академии наук. 2007. Т. 414, № 4. С. 1309–1312.
3. Бурлуцкая М. Ш. О некоторых свойствах дифференциальных уравнений и смешанных задач с инволюцией // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер.: Физика. Математика. 2019. № 1. С. 60–68.
4. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Romanova E. Yu. Spectral analysis of a differential operator with an involution // J. Evolut. Equat. 2017. V. 17. P. 669–684.
5. Владыкина В. Е., Шкаликов А. А. Спектральные свойства обыкновенных дифференциальных операторов с инволюцией // Доклады Академии наук. 2019. Т. 484. № 1. С. 12–17.
6. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Метод Фурье в смешанной задаче для уравнения первого порядка с инволюцией // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51. № 12. С. 2233–2246.
7. Бурлуцкая М. Ш. О смешанной задаче для уравнения первого порядка с инволюцией и с периодическими краевыми условиями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014, Т. 54, № 1. С. 3–12.