Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Быстро сходящиеся черновские аппроксимации к решению уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности

Научный руководитель – Ремизов Иван Дмитриевич

Веденин Александр Владимирович

Студент (магистр)

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» - Нижний Новгород, Нижний Новгород, Россия

E-mail: lcsndr@mail.ru

Доклад посвящён аппроксимациям C_0-полугрупп, основанным на теореме Чернова (см. [1-3]) и имеющим скорость сходимости выше const/n. Главный результат доклада:

Теорема 1. *Для каждых* $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, $a, a', a'', f \in UC_b(\mathbb{R})$, $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ *положим*

$$(S(t)f)(x) = \frac{1}{3}\left(f\left(x + t\sqrt{\frac{3}{2}a(x)a''(x)}\right) + f\left(x - t\sqrt{\frac{3}{2}a(x)a''(x)}\right)\right) + \\ + \frac{1}{6}\left(f\left(x + \sqrt{6a(x)t}\right) + f\left(x - \sqrt{6a(x)t}\right)\right) + \\ + 3t\left(f\left(x + \sqrt[3]{a(x)a'(x)t}\right) - f\left(x + 2\sqrt[3]{a(x)a'(x)t}\right)\right) + tf\left(x + 3\sqrt[3]{a(x)a'(x)t}\right) - tf(x) \quad (1)$$

$$(H\varphi)(x) = a(x)\varphi''(x) \quad (2)$$

Предположим, пространство всех равномерно непрерывных и ограниченных функций $UC_b(\mathbb{R})$ *наделено нормой* $\|f\| = sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$, *оператор* H *задан формулой (2) на множестве* $C_b^\infty \subset UC_b(\mathbb{R})$*и его замыкание a) существует, b) является генератором некоторой* C_0-*полугруппы в* $UC_b(\mathbb{R})$. *Тогда для задачи Коши*

$$\begin{cases} u_t'(t,x) = a(x)u_{xx}''(t,x) & t \geq 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

где $a(x) \geq 0, a \in UC_b(\mathbb{R})$, *решение* $u(t,x)$ *представимо в виде предела быстро сходящихся черновских аппроксимаций* $u(t,x) = (e^{tH}u_0)(x) = \lim\limits_{n\to\infty}(S\left(\frac{t}{n}\right)^n u_0)(x)$ *где* S *удовлетворяет условию* $S(t) = I + tH + \frac{(tH)^2}{2} + o(t^2)$.

Замечание 1. Если верна гипотеза Ремизова ([3], Remark 7) и начальное условие u_0 достаточно гладкое, то для каждого $t > 0$ найдётся такая константа $C(t) > 0$, что $\|e^{tH}u_0 - S\left(\frac{t}{n}\right)^n u_0\| = \sup_{x\in\mathbb{R}}|u(t,x) - (S\left(\frac{t}{n}\right)^n)u_0(x)| < C(t)/n$.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение No 075-15-2019-1931.

Источники и литература

1 И.Д. Ремизов. Фейнмановские и квазифейнмановские формулы для эволюционных уравнений // Доклады Академии наук. 2017. Т. 476. № 1. С. 17-21.

2 Engel K.-J. , Nagel R.. One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. // Springer, 2000.

3 A. V. Vedenin, V. S. Voevodkin, V. D. Galkin, E. Yu. Karatetskaya, I. D. Remizov. Speed of convergence of Chernoff approximations to solutions of evolution equations// arXiv:1910.09440 (2020)