Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Описание крайних точек семейств вогнутых мер в терминах плотностей.

Научный руководитель – Богачев Владимир Игоревич

Калинин Александр Николаевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра теории функций и функционального анализа, Москва, Россия

E-mail: vironna21@mail.ru

В работе [1] описан специальный класс мер

Определение 1. Радоновская мера μ на действительном локально выпуклом пространстве E называется α-вогнутой ($-\infty \leq \alpha \leq \infty$), если для любых непустых борелевских множеств A и B и всех $0 < t < 1$,

$$\mu_*((1-t)A + tB) \geq \Big[(1-t)\mu(A)^\alpha + t\mu(B)^\alpha\Big]^{1/\alpha}$$

Где $(1-t)A + tB = \{(1-t)x + ty \,:\, x \in A\,, y \in B\}$,
$\mu_*(U) = \sup\{\mu(V) \,:\, V -$ измеримое подмножество $U\}$.

На выпуклом компакте K в локально выпуклом пространстве E рассмотрим семейство $\mathcal{M}_\alpha(K)$ всех α-вогнутых вероятностных мер, имеющих носитель в K.

Для заданного набора полунепрерывных сверху функций $f_i \,:\, 1 \leq i \leq n$ определим подсемейство мер

$$\mathcal{P}(f_1, \ldots, f_n) = \Big\{\mu \in \mathcal{M}_\alpha(K) \,:\, \int f_i d\mu \geq 0\,,\, 1 \leq i \leq n\Big\}.$$

На выпкуклой оболочке $\tilde{\mathcal{P}}(f_1, \ldots, f_n)$ этого семейства рассмотрим крайние точки. В [1] дано описание крайних точек множества $\tilde{\mathcal{P}}(f_1, \ldots, f_n)$ в терминах плотностей для $n = 1$. Используя совместно методики из работ [1],[2] и [3], можно обобщить эти результаты на случай произвольного конечного n и . Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $f_1, \ldots, f_n$ — полунепрерывные сверху функции на K и $-\infty \leq \alpha \leq 1$. Тогда размерность носителя любой крайней точки μ множества $\widetilde{\mathcal{P}}(f_1, \ldots, f_n)$ не превосходит n. Более того, если дополнительно $\alpha \leq \frac{1}{n+1}$, то либо μ сосредоточена в одной точке $x \in K$, причем $f_i(x) \geq 0, i = 1, \ldots, n$, либо носителем меры является выпуклый компакт в K и, если размерность носителя μ равна n, функция плотности имеет вид*

$$f(x) = (V(x))^\gamma,\ \gamma = \frac{1}{\alpha} - n$$

с некоторой специальной функцией $V \colon F \to (0, \infty)$.

Список литературы

[1] Бобков С.Г. , Мельбурн Дж. *Локализация для бесконечномерных гиперболических мер.* Доклады Академии наук. - 2015. - Т. 462, № 3, май. - с. 261-263.

[2] Fradelizi M., Guédon O. *The extreme points of subsets of s-concave probabilities and a geometric localization theorem.* Discrete Comput. Geom. 31 (2004), no. 2, 327–335.

[3] Borsuk K. *Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre* — Fund. Math., 20 (1933), c. 177—190.