Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Представления решений эволюционных уравнений со знакопеременным гамильтонианом

Научный руководитель – Смолянов Олег Георгиевич

Лобода Артём Александрович

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра теории функций и функционального анализа, Москва, Россия

E-mail: orion1312@yandex.ru

Рассматривается детерминированное уравнение типа Шрёдингера со знакопеременным гамильтонианом

$$i\psi'(t) = H_1(\psi(t)) + \widetilde{V}(q_1, q_2)\psi(t). \tag{1}$$

Мы полагаем, что $Q = \mathbb{R}^2$, H_1 - оператор в $L_2(Q)$, $(H_1\varphi)(q_1, q_2) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial q_1^2}(q_1, q_2) - \frac{\partial^2\varphi}{\partial q_2^2}(q_1, q_2)$.

С помощью модификации метода замены переменной это уравнение переводится в уравнение теплопроводности с обычным оператором Лапласа. Для задачи Коши, соответствующей уравнению теплопроводности, выведена формула Фейнмана-Каца, которая используется для получения представления решения уравнения (1) функциональныи интегралом

$$\psi(t, q_1, q_2) = \int_{C_0[0,t]} e^{\int_0^t \widetilde{V}(q_1+\sqrt{i}\xi_1(\tau), q_2+\frac{\xi_2(\tau)}{\sqrt{i}})d\tau}\psi_0(q_1 + \sqrt{i}\xi_1(t), q_2 + \frac{\xi_2(t)}{\sqrt{i}})w(d\xi_1 d\xi_2). \tag{2}$$

Аналогичный метод предполагается использовать для вывода формулы Фейнмана-Каца, которая является представлением решения стохастического уравнения типа Шрёдингера со знакопеременным гамильтонианом

$$d\psi(t)(q_1, q_2) = \left(\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q_1} - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q_2} - iV(q_1, q_2) - \frac{\lambda_1}{2}q_1^2 + \frac{\lambda_2}{2}q_2^2\right)\psi(t)(q_1, q_2) +$$
$$+ \sqrt{\lambda_1}q_1\psi(t)(q_1, q_2)dB_1(t) - \sqrt{\lambda_2}q_2\psi(t)(q_1, q_2)dB_2(t),$$

где λ_1 и λ_2 - неотрицательные числовые параметры, а B_1 и B_2 - независимые броуновские движения(подробнее вывод и физический смысл коэффициентов см. в [1] и [2]).

Планируется обсудить связь между методами получения представлений решений для указанных выше уравнений и одномерного уравнения типа теплопроводности, задача Коши для которого выглядит следующим образом:

$$d\Psi_\omega(t)(\cdot) = a(\Psi_\omega(t))''(\cdot) + bV(t, \cdot)\Psi_\omega(t)(\cdot) + +cR(\cdot)\Psi_\omega(t)(\cdot)dB_\omega(t), \Psi_\omega(0)(\cdot) = \varphi_0(q),$$

где $\omega \mapsto \Psi_\omega(t)(\cdot)$ - случайная функция, заданная на множестве функций с областью определения в конфигурационном пространстве Q, $R(\cdot), V(\cdot), \varphi_0$ - функции на Q и $R, q, b, c > 0$ (см. [3] и [4]).

Также в докладе будет обсуждаться применение описанного выше подхода к бесконечномерным уравнениям Шрёдингера. В частности, будет рассмотрена связь бесконечномерного уравнения типа Шрёдингера и гамильтоновой меры Фейнмана (подробнее см. [5]).

Источники и литература

1) *Smolyanov O.G., Truman A.*Theoretical and Mathematical Physics, 1999. V. 120, N 2, P. 973-984.
2) *J. Gough, O.O. Obrezkov, O.G. Smolyanov.* Randomized Hamiltonian Feynman integrals and Shcrödinger-Itô stochastic equations.// Izvestiya: Mathematics, 2005. V.69, N 6, P. 1081-1098.
3) *Лобода А. А.* Метод Ито доказательства формулы Фейнмана-Каца для евклидова аналога стохастического уравнения Шрёдингера.//Дифференциальные уравнения, 2018. V. 54, N 4, P. 561–564.
4) *Лобода А. А.* Метод Досса для стохастического уравнения Шрёдингера — Белавкина.//Математические заметки, 2019. V. 106, N 2, P. 311-315.
5) *Loboda A. A/* Schrödinger Equation with Signed Hamiltonian.// RJMP 27:1 (2020) (в печати).