Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Некоторые неравенства для положительно определённых функций

Научный руководитель – Заставный Виктор Петрович

Манов Анатолий Дмитриевич
Аспирант
Донецкий национальный университет, Факультет математики и информационных технологий, Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений, Донецк, Украина
E-mail: manov.ad@ro.ru

Пусть G абелева группа. Комплекснозначная функция $f : G \to \mathbb{C}$ называется положительно определённой на G ($f \in \Phi(G)$), если для любого $n \in \mathbb{N}$, и для любых элементов $\{x_i\}_{i=1}^n \subset G$, а также для любого набора комплексных чисел $\{c_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{C}$ выполнено неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{c_j} f(x_i - x_j) \geqslant 0.$$

Из определения выше вытекает, что если $f \in \Phi(G)$, то $|f(x)| \leqslant f(0)$, $x \in G$. Если на функцию f наложить дополнительные условия, то это неравенство можно усилить. В данной работе доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ *и* $\varphi(x) = 0$ *при* $\max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} \geqslant 1$. *Тогда*

$$\left| \sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^n} \varphi(x - \varepsilon) \right| \leqslant \varphi(0), \;\; x \in [0,1]^n.$$

Теорема 2. *Пусть* $\varphi \in \Phi(\mathbb{R})$ *и* $\varphi(x) = 0$ *при* $|x| \geqslant a$, $a > 0$. *Тогда для всех* $x, y \in \mathbb{R}$ *таких, что* $|x| + |y| \geqslant a$ *справедливо неравенство:*

$$|\varphi(x)| + |\varphi(y)| \leqslant \varphi(0).$$