Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Потенциалы Рисса переменного порядка с суммируемой плотностью в весовых пространствах переменной гёльдеровости

Научный руководитель – Вакулов Борис Григорьевич

Дроботов Юрий Евгеньевич
Аспирант
Южный федеральный университет, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Ростов-на-Дону, Россия
E-mail: yu.e.drobotov@yandex.ru

Рассматривается оператор типа потенциала Рисса переменного порядка $\alpha(x)$ с характеристикой $c(x,\sigma)$:

$$\left(I_{\Omega}^{\alpha(\cdot)} f\right)(x) := \int\limits_{\Omega} \frac{c(x,\sigma) f(\sigma)}{r^{n-\alpha(x)}(x,\sigma)} d\sigma, \tag{1}$$

где функция $r(x,\sigma)$ – метрика на Ω, а значение n является размерностью пространства, содержащего или равного Ω. В роли последнего выступают гиперсфера $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ единичного радиуса и гиперплоскость $\dot{\mathbb{R}}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ с одноточечной компактификацией на бесконечности.

Исследуется отображение оператором (1) суммируемой функции $f(x)$ для постоянной характеристики и характеристики специального вида. Принципиально важной проблемой поставлено получение теорем о действии такого потенциала в пространство Гёльдера с переменным показателем.

Пространство переменной гёльдеровости $H^{\lambda(\cdot)}(\Omega)$ существенно для определения понятия гладкости в дробном интегродифференцировании [1]. В терминах локального модуля непрерывности

$$M_r(f,t,x) := \sup_{y \in \Omega : r(x,y) \le t} |f(x) - f(y)|$$

оно определяется как множество непрерывных на Ω функций, удовлетворяющих условию

$$\forall x \in \Omega, \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad M_r(f,t,x) \le C t^{\lambda(x)}, \quad C > 0.$$

Действие потенциала (1) внутри даже более общих пространств, допускающих в качестве мажоранты модуля непрерывности произвольную функцию из класса Зигмунда–Бари–Стечкина, было исследовано в работах [2, 3].

В задачи настоящей работы входит распространение следующего результата об ограниченности сферического потенциала Рисса переменного порядка $I_{\mathbb{S}^{n-1}}^{\alpha(\cdot)}$ и его пространственного аналога на случай весовых пространств

$$H^{\lambda(\cdot)}(\Omega, w) := \left\{ f \in \mathrm{C}(\Omega) : wf \in H^{\lambda(\cdot)}, \lim_{x \to a} wf = 0 \right\},$$

где $\mathrm{C}(\Omega)$ – пространство непрерывных на Ω функций, a – число или символ ∞ в зависимости от вида веса $w(x)$:

Теорема 1. *Пусть $n \ge 3$, $1 < p < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$ и выполнены следующие условия:*

1) $\alpha \in Lip(\mathbb{S}^{n-1})$;

2) $\alpha_- := \inf\limits_{x \in \mathbb{S}^{n-1}} \alpha(x) > (n-1)/p$;

3) $\alpha_+ := \sup\limits_{x \in \mathbb{S}^{n-1}} \alpha(x) < (n-1)/p + 1$.

Тогда оператор $I_{\mathbb{S}^{n-1}}^{\alpha(\cdot)}$ ограничен из $L^p(\mathbb{S}^{n-1})$ в $H^{\lambda(\cdot)}(\mathbb{S}^{n-1})$, $\lambda(x) = \alpha(x) - \frac{n-1}{p}$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и ТУБИТАК в рамках научного проекта № 20-51-46003.

Источники и литература

1) Вакулов Б. Г. Сферические операторы типа потенциала в весовых пространствах Гёльдера переменного порядка. Владикавказский математический журнал, Т. 7, №2. С. 26–40.
2) Samko N., Vakulov B. Spherical fractional and hypersingular integrals of variable order in generalized Hölder spaces with variable characteristics. Math. Nachr., Vol. 284, №2–3, 2011. Pp. 355–369.
3) Вакулов Б. Г., Дроботов Ю. Е. Оператор типа потенциала переменного порядка по $\dot{\mathbb{R}}^n$ в весовых пространствах обобщенной переменной гельдеровости. Сиб. электрон. матем. изв., 14, 2017. С. 647–656