Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

О влиянии электронных соударений на свойства решений уравнений холодной плазмы

Научный руководитель – Розанова Ольга Сергеевна

Делова Мария Игоревна
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальных уравнений, Москва, Россия
E-mail: mashadelova@yandex.ru

Рассмотрим систему уравнений, возникающую при описании колебаний холодной электронной плазмы [1] при учете электронных соударений

$$\frac{\partial V}{\partial t}+V\frac{\partial V}{\partial x}+E+\nu V=0,\quad \frac{\partial E}{\partial t}+V\frac{\partial E}{\partial x}-V=0. \tag{1}$$

Здесь функции $V(x,t)$, $E(x,t)$, $x\in\mathbb{R}$, $t\in\mathbb{R}_+$, имеют смысл скорости электронов и напряженности электрического поля, ν - достаточно малая неотрицательная константа, характеризующая интенсивность электронных соударений. Эта система исследовалась в [1] численно. В теории холодной плазмы важно найти условия на начальные данные, при которых решение потеряет гладкость в течение конечного времени, так как после этого времени модель становится неприменимой [2]. Рассмотрим задачу Коши

$$(V(x,0),E(x,0))=(V_0(x),E_0(x))\in C^2(\mathbb{R}). \tag{2}$$

Задача (1), (2) при $\nu=0$ исследовалась в [3], где были найден критерий потери гладкости в терминах начальных данных. В настоящей работе мы решаем аналогичную задачу при $\nu<2$ и исследуем влияние коэффициента ν на изменение области начальных данных, при которых решение может быть продолжено на всю полуось $t>0$.

Обозначим $q=V_x$, $s=E_x$, $q_0(x)=q(x,0)$, $s_0(x)=s(x,0)$. Физический смысл имеют только значения $s_0<1$.

Теорема 1. *Пусть* $0\le\nu<2$. *Обозначим*

$$F(t,x)=(1-s_0)e^{\frac{1}{2}\nu t}+\sqrt{A^2+s_0^2}\sin(\frac{\sqrt{4-\nu^2}}{2}t+\theta_0),$$

где $A=\frac{\nu s_0+2q_0}{\sqrt{4-\nu^2}}$, $\theta_0=\arcsin\frac{s_0}{\sqrt{A^2+s_0^2}}$. *Если существуют* $t_*>0$, $x_0\in\mathbb{R}$ *такие, что* $F(t_*,x_0)=0$, *то то в течение некоторого конечного времени производные решения задачи* (1), (2) *обращаются в бесконечность. В противном случае решение задачи* (1), (2) *класса* C^2 *существует при всех* $t>0$.

Поскольку корни уравнения $F(t,x_0)=0$ не могут быть найдены явно, то условие теоремы 1, являющееся необходимым и достаточным условием образования особенности, трудно проверить. Однако в терминах начальных данных можно получить достаточные условия образования особенности и достаточные условие сохранения гладкости.

Следствие 1. *Пусть для всех* $x\in\mathbb{R}$ *выполнено следующее неравенство:*

$$(1-s_0)^2>A^2+s_0^2.$$

Тогда решение задачи (1), (2) *класса* C^2 *существует при всех* $t>0$. *Если же существует хотя бы одна точка* x_0, *для которой выполнено неравенство*

$$(1-s_0)^2 e^{\nu T} \le A^2 + s_0^2, \quad T = \frac{3\pi - 2\theta_0}{\sqrt{4-\nu^2}}$$

то в течение некоторого конечного времени производные решения обращаются в бесконечность.

В пределе при $\nu \to 0$ мы можем получить результат [3].

Исследование области на плоскости (q_0, s_0), соответствующей глобально гладкому решению, показывает, что влияние ν неоднозначно.

Источники и литература

1) Фролов А. А., Чижонков Е. В. Влияние соударений электронов на опрокидывание плазменных колебаний // Физика плазмы. — 2018. — Т. 44, № 4. — С. 347–354.
2) Чижонков Е.В. Математические аспекты моделирования колебаний и кильватерных волн в плазме, ФИЗМАТЛИТ М, 2018.
3) Rozanova O. S., Chizhonkov E. V. On the conditions for the breaking of oscillations in a cold plasma, ArXiv e-prints: 1912.08152.