Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Простые особенности функций, четных или нечетных по каждой переменной

Научный руководитель – Асташов Евгений Александрович

Абдрахманова Нелли Тагировна

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра теории динамических систем, Москва, Россия

E-mail: abd.nelly@yandex.ru

Существует общая задача классификации ростков аналитических функций многих переменных, эквивариантных относительно действий некоторой конечной группы на образе и прообразе и при этом простых, то есть имеющих лишь конечное число примыкающих к ним классов эквивариантной правоэквивалентности. Частные случаи этой задачи рассматривались в работах В. И. Арнольда [1], Е. А. Асташова [2], М. Маноэль [3] и других авторов. В докладе получена классификация простых особых ростков аналитических функций многих переменных, четных или нечетных по каждой переменной.

Отображение G-многообразий $f\colon M \to N$ называется *эквивариантным*, если для всех точек $x \in M$ и всех элементов $\sigma \in G$ выполнено равенство $f(\sigma \cdot x) = \sigma \cdot f(x)$.

Два эквивариантных отображения G-многообразий $f, g\colon M \to N$ называются *эквивариантно правоэквивалентными* (или *$\mathcal{R}^G$-эквивалентными*), если существует эквивариантный диффеоморфизм $\Phi\colon M \to M$, для которого $g = f \circ \Phi$.

Пусть $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Функции $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, нечетные по каждой из переменных $x_1, \ldots, x_p$ и четные по каждой из переменных $x_{p+1}, \ldots, x_n$ - это функции, эквивариантные относительно действий группы $G = (\mathbb{Z}_2)^n$ с образующими $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ на $\mathbb{K}^n_{(x_1,\ldots,x_n)}$ и на $\mathbb{K}_{(y)}$ по формуле:

$$\sigma_j \cdot (x_1, \ldots, x_n;\, y) = \big(x_1, \ldots, x_{j-1}, -x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n;\, \varepsilon_j y\big),\ j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{1}$$

где $\varepsilon_j = -1$ при $1 \leqslant j \leqslant p$ и $\varepsilon_j = 1$ при $p+1 \leqslant j \leqslant n$.

Через $\mathcal{O}_n^G$ обозначим кольцо ростков G-эквивариантных аналитических функций $(\mathbb{K}^n, 0) \to (\mathbb{K}, 0)$. Чтобы подчеркнуть зависимость от p будем использовать обозначение $\mathcal{O}_{n,p}^G$ и понятия $\mathcal{R}_p^G$-эквивалентности и G_p-простоты.

Основной результат делится на два случая в зависимости от p в формуле (1).

Теорема 1. *Пусть группа $G = (\mathbb{Z}_2)^n$ действует на $\mathbb{K}^n$ и на $\mathbb{K}$ по формуле (1), где $p = 0$, $f \in \mathcal{O}_{n,0}^G$ — инвариантный росток с критической точкой в начале координат. Росток f является G_0-простым тогда и только тогда, когда он $\mathcal{R}_p^G$-эквивалентен одному из ростков $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \pm x_1^{2k} \pm x_2^2 \pm \ldots \pm x_n^2$ где $k \in \mathbb{N}$. Знаки $\pm$ независимы друг от друга и при $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ могут быть заменены на плюсы.*
Пусть группа $G = (\mathbb{Z}_2)^n$ действует на $\mathbb{K}^n$ и на $\mathbb{K}$ по формуле (1), где $p > 0$, $f \in \mathcal{O}_{n,p}^G$ — эквивариантный росток с критической точкой в начале координат. Росток f является G_p-простым тогда и только тогда, когда он $\mathcal{R}_p^G$-эквивалентен одному из ростков $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 \ldots x_p \cdot (\pm x_1^{2k} \pm x_2^2 \pm \ldots \pm x_n^2)$ или $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 \ldots x_p \cdot (\pm x_1^2 \pm \ldots \pm x_p^2 \pm x_{p+1}^{2k} \pm x_{p+2}^2 \pm \ldots \pm x_n^2)$, где $k \in \mathbb{N}$. Знаки $\pm$ независимы друг от друга и при $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ могут быть заменены на плюсы.

В докладе приведены непосредственные вычисления нормальных форм для $n = 2$.

Список литературы

[1] В. И. Арнольд, “Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля A_k, D_k, E_k и лагранжевы особенности”, *Функциональный анализ и его приложения* **6**, No. 4, 3–25 (1972).

[2] Е. А. Асташов, “Классификация ростков функций, эквивариантно простых относительно группы порядка 3”, *Математические заметки*, **105**, No. 2, 163–178 (2019).

[3] W. Domitrz, M. Manoel, P. de M. Rios, “The Wigner caustic on shell and singularities of odd functions”, *Journal of Geometry and Physics* **71**, 58–72 (2013).