

Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Интегрируемость по Лиувиллю и проблема Пуанкаре для нелинейных осцилляторов с квадратичным и линейным затуханием

Научный руководитель – Белова Мария Владимировна

Кузнецов Николай Сергеевич

Студент (магистр)

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва,
Россия

E-mail: kuznetsov.nikolai.91@gmail.com

В данном исследовании объектом рассмотрения являются обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) вида

$$x_{tt} + \varepsilon x_t^2 + \eta x_t + f(x) = 0, \quad f(x) = f_0 x^n + \dots + f_n, \quad f_0 \neq 0, n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

все параметры в которых без ограничения общности считаем комплексными, а также соответствующие этим ОДУ динамические системы. Уравнения такого вида описывают динамику нелинейных осцилляторов с полиномиальными нелинейностями. Если $\varepsilon \neq 0$, то затухание является квадратичным, если же $\varepsilon = 0$ и $\eta \neq 0$, то линейным.

Нелинейные осцилляторы с квадратичным затуханием находят применение в различных областях науки и техники, таких как механика, энергетика и биология. Наибольший интерес среди нелинейных осцилляторов с линейным затуханием представляют осцилляторы Дуффинга и их обобщения, которые находят применение в различных задачах математической физики. Кроме этого, переходом к переменным бегущей волны уравнения реакции-диффузии можно привести к уравнениям вида (1). Уравнения реакции-диффузии используются при моделировании различных процессов в биологии, экологии и описывают, например, инвазию опухолей.

В данном исследовании с помощью классической теории интегрируемости Дарбу и нового метода рядов Пуизэ [1] найдены все неприводимые инвариантные алгебраические кривые полиномиальных векторных полей, соответствующих рассматриваемому семейству обыкновенных дифференциальных уравнений. Также решена проблема Пуанкаре, состоящая в поиске оценки сверху для степеней неприводимых инвариантных алгебраических кривых. Для всех рассматриваемых уравнений найдены необходимые и достаточные условия интегрируемости по Лиувиллю и представлены независимые первые интегралы. Для систем с квадратичным затуханием доказано отсутствие предельных циклов в интегрируемых случаях.

Большая часть результатов получена впервые. Отметим, что в работе полностью решена проблема интегрируемости по Лиувиллю для исследуемых нелинейных осцилляторов. Полученные результаты применимы для дальнейшего изучения нелинейных осцилляторов, в частности, для исследования динамических свойств и нахождения аналитических решений соответствующих дифференциальных уравнений.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках гранта № 19-71-10003.

Источники и литература

- 1) Demina M. V. Novel algebraic aspects of Liouvillian integrability for two-dimensional polynomial differential systems // Phys. Lett. A., 2018. Vol. 382. No. 20. С. 1353-1360.