Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

**Об одном классе нелокальных задач Соболева на римановом многообразии**

**Научный руководитель – Савин Антон Юрьевич**

***Сипайло Павел Андреевич***

*Выпускник (специалист)*

Московский институт электроники и математики, Москва, Россия

*E-mail: sipaylo@gmail.com*

Изучается однородная задача Соболева (псевдодифференциальная задача на замкнутом многообразии с граничными условиями, заданными на подмногообразии произвольной коразмерности: см. [1]) с нелокальными условиями, заданными с помощью оператора сферического среднего.

Пусть $(M, g)$ — риманово многообразие. *Оператором сферического среднего* на $M$ с весом $\mu \in C^\infty(M \times M)$ называется оператор, действующий на функцию $u(w)$ по формуле

$$[\mathcal{M}^r(\mu)\, u](w) = \int_{S^r(w)} \mu(w, w')\, u(w')\, dV_{r,w}(w'),$$

где $S^r(w) \subset M$ — геодезическая сфера на $M$ радиуса $r$ с центром в точке $w \in M$ и $dV_{r,w}$ — форма объёма на $S^r(w)$, индуцированная римановой метрикой. Оператор $\mathcal{M}^r(\mu)$ действует ограниченно в шкале пространств Соболева $H^s(M) \to H^{s+(n-1)/2}(M)$, где $n = \dim M$.

Теперь пусть $i\colon X \hookrightarrow M$ — вложение замкнутых римановых многообразий, $\dim M = n$, $\operatorname{codim}_M X = \nu$. Рассматривается задача

$$\begin{cases} Du = 0 \quad \text{на} \quad M \setminus X, \\ i^*(B + A\mathcal{M}^r(\mu))\, u = g \in H^{s-b-\nu/2}(X), \end{cases} \tag{1}$$

где неизвестная функция $u$ ищется в пространстве Соболева $H^s(M)$, число $r > 0$ мало, а $D$,$B$,$A$ суть псевдодифференциальные операторы на $M$ порядков $d$, $b$, $b + (n-1)/2 + \nu/2$, соответственно.

Задача (1) называется *фредгольмовой*, если одновременно выполнены условия:

A) подпространство в $H^s(M)$ решений однородной задачи (1) конечномерно;

B) количество условий ортогональности на правую часть $g$ граничного условия задачи (1), необходимых для разрешения задачи, конечно.

(Иначе, задаче (1) сопоставляется специальный разрешающий оператор и изучается его фредгольмовость.)

Мы получаем условия фредгольмовости задачи (1) в терминах эллиптичности некоторого $G$-оператора (в смысле работы [2]) на подмногообразии $X$, при условии, что подмногообразие $X$ является вполне геодезическим (т.е. всякая геодезическая на $X$ является геодезической и на $M$).

Отметим, что при выводе указанного $G$-оператора на $X$ мы находим представление для оператора сферического среднего в виде интегрального оператора Фурье, ассоциированного с (двусторонним) геодезическим потоком. Именно, при малых $r$ справедливо равенство

$$\mathcal{M}^r(\mu) = P^+ e^{ir\sqrt{-\Delta}} + P^- e^{-ir\sqrt{-\Delta}},$$

где $\Delta$ — оператор Лапласа на $M$, а $P^\pm$ — псевдодифференциальные операторы, чьи главные символы явно вычисляются. Этот результат представляет интерес и сам по себе.

Работа выполнена совместно с А.Ю. Савином и В.Е. Назайкинским. Работа выполнена в РУДН в рамках проекта РФФИ № 19-01-00574А.

**Источники и литература**

1) Б. Ю. Стернин. Эллиптические и параболические задачи на многообразиях с границей, состоящей из компонент различной размерности // Труды Моск. Мат. общ-ва, т. 15. 1966. С. 346–382.

2) A. Savin, E. Schrohe, and B. Sternin. Elliptic operators associated with groups of quantized canonical transformations. // Bull. Sci. Math., 155. 2019. p.141–167.