Секция «Геометрия и топология»

Бинарные деревья и выпуклые многогранники

Научный руководитель – Александр Олегович aoiva@mail.ru

Щербаков Олег Сергеевич
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: integralis@mail.ru

В работе [1] задача о поиске минимального параметрического заполнения конечного метрического пространства сведена к задаче отыскания вершин выпуклого многогранника, связанного с бинарным деревом. Под бинарным деревом мы понимаем дерево, степени вершин которого равны один или три. Минимальное заполнение конечного метрического пространства M определено в [2] как обобщение проблемы Штейнера и понятия минимального заполнения метрического пространства в смысле М. Громова [3]. Дерево $G = (V, E)$, на множестве ребер которого задана произвольная функция ω, называется заполнением типа G пространства M , если $M \subset V$, и для любой пары элементов из M вес пути в дереве G, соединяющего эти вершины, больше или равен расстоянию между ними как точками в метрическом пространстве M. Заполнение типа G наименьшего возможного веса называется минимальным параметрическим заполнением типа G. Если теперь взять инфимум по всем возможным типам G, то получим понятие минимального заполнения.

Дано бинарное дерево и его матрица смежности. Пусть M – множество висячих (степени 1) вершин бинарного дерева; $|M| = n$. Тогда рёбер дерева $2n - 3$. Путь из вершины v_i в вершину v_j обозначим Γ_{ij}. Поставим в соотвествие бинарному дереву матрицу A следующим образом: столбцы матрицы соотвествуют парам вершин, строки – ребрам, элемент a_k^{ij} стоит на k строке и на ij столбце, $1 \leq i < j \leq n$. Очевидно, что столбцов всего $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

$$a_k^{ij} = \begin{cases} 1 & e_k \in \Gamma_{ij} \\ 0 & e_k \notin \Gamma_{ij} \end{cases}$$

Рассмотрим задачу отычкания и описания следующего множества:

$$\mathcal{V}_A = \{x | Ax = \mathbb{I}, x \geq 0\} \qquad (\mathbb{I} = (1, 1, ..., 1)^T)$$

$\mathcal{V}_A$ – выпуклый многогранник, полученный пересечением аффинного подпространства $\{x|Ax = \mathbb{I}\}$ с множнством $x \geq 0$. Как показано в [1], поиск минимального параметрического заполнения типа G сводится к максимизации на этом многограннике некоторой зависящей от метрики на M линейной функции. Максимальное значение достигается в одной из вершин этого многогранника, к перебору которых и сводится таким образом задача.

В работе [1] доказано, что строки матрицы A есть линейно независимы; приводятся многогранники для бинарных деревьев с 4, 5 и 6 висячими вершинами.

Продолжая исследование, в докладе рассматриваются бинарные деревья специального вида с n вершинами, для них строится матрица A, и исследуется многогранники $\mathcal{V}_A$. Автоморфизмы дерева соответсвуют перестановкам вершин многогранника A. В частности, исследуются бинарные деревья типа “змея” (так мы называем бинарное дерево у кторого только две пары “усов” – висячих вершин, имеющих ребра, инцидентные общей вершине) и “ветвящееся” дерево – дерево с $3 \cdot 2^k$ висячими вершинами, удалив которые получится дерево с $3 \cdot 2^{k-1}$ висячими вершинами.

Источники и литература

1) Alexander I., Alexey T. Dual linear programming problem and one-dimensional gromov minimal fillings of finite metric space // ArXiv e-prints: arXiv:1907.03828. — 2019.
2) Иванов А. О., Тужилин А .А., “Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении”, Матем. сборник, 203 (5), 65–118 (2012)
3) M. Gromov, “Filling Riemannian manifolds”, J. Diff. Geom. 1983. V. 18. No 1. P. 1–147.