Секция «Геометрия и топология»

Теорема Матиясевича и модели Изинга-Поттса-Биггса

Научный руководитель – Талалаев Дмитрий Валерьевич

Казаков Антон Александрович
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей геометрии и топологии, Москва, Россия
E-mail: anton.kazakov.4@mail.ru

Секция «Геометрия и топология»

Теорема Матиясевича и модели Изинга-Поттса-Биггса

Научный руководитель – Талалаев Дмитрий Валерьевич

Казаков Антон Александрович
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей геометрии и топологии, Москва, Россия
E-mail: anton.kazakov.4@mail.ru

Теорема Матиясевича и модели Изинга-Поттса-Биггса

Определим модель Изинга-Поттса-Биггса (interaction model) на произвольном графе Γ следующим образом:

Определение 1. В каждой вершине v графа Γ зафиксируем некоторое значение $a(v)$ (для каждой вершины свое) из некоторого коммутативного кольца A с единицей, совокупность всех значений в вершинах назовем состоянием σ. Энергией состояния σ назовем величину $H(\sigma) = \prod i(\delta(vw))$, где произведение ведется по всем ребрам vw графа Γ (ребро vw соединяет вершины v и w), $\delta(vw) = a(v) - a(w)$ и $\forall b \in A\ i(b) = i(-b)$. Статсуммой назовем следующую величину - $Z_\Gamma = \sum_\sigma H(\sigma)$, где суммирование ведется по всем возможным состояниям σ.

Оказывается, что язык таких моделей является чрезвычайно удобным для изучение различных комбинаторных задач теории графов. Так в докладе будет рассказано новое доказательство теоремы Матиясевича, которая может быть сформулирована следующем образом:

Теорема 1. *(теорема Матиясевича) Рассмотрим граф Γ, хроматический полином этого графа - X_Γ, может быть вычислен с помощью потоковых полиномов – C_A, всех его остовных подграфов A следующим образом:*

$$X_\Gamma(n) = \frac{(n-1)^{e(\Gamma)}}{n^{e(\Gamma)-v(\Gamma)}} \sum_A \frac{C_A(n)}{(1-n)^{e(A)}}$$

.

Более того, будет рассказано, как получать теоремы такого рода регулярным образом, например, будет рассказано «обращение» теоремы Матиясевича:

$$F_\Gamma(n) = n^{v(\Gamma)} C_\Gamma(n) = (n-1)^{e(\Gamma)} \sum_A \frac{n^{e(A)}}{(1-n)^{e(A)}} X_A(n)$$

.
Также будет рассказано о развитии полученной техники на примере теоремы 2 и ее связи с конволютивной формулой [4].

Теорема 2. *Рассмотрим граф* Γ *и* n*-модель Поттса (где* $n = n_1 n_2 ... n_k$*), тогда статсумма этой* n*-модели Поттса может быть вычислена с помощью статсумм* $n_i -$*моделей Поттса* $(i = 1...k)$ *всех остовных подграфов* A *графа* Γ.

Литература.

1. Матиясевич Ю. В. Об одном представлении хроматического многочлена //Дискретный анализ. – 1977. – Т. 31. – С. 61-70.
2. Карпов Д. В. Теория графов //СПб.: Санкт-Петербургское отделение Мат. института им. ВА Стеклова РАН. – 2017.
3. Biggs N. L. et al. Interaction models. – Cambridge University Press, 1977. – Т. 30.
4. Kook W., Reiner V., Stanton D. A convolution formula for the Tutte polynomial //arXiv preprint math/9712232. – 1997.