

Об обратимости в гомотопически инвариантных функторах, связанных с алгебрами PoU

Научный руководитель – Мануйлов Владимир Маркович

Макеев Георгий Сергеевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей геометрии и топологии, Москва,
Россия

E-mail: makeefu@ya.ru

Многие известные гомотопические бифункторы из категории C^* -алгебр и $*$ -гомоморфизмов в категорию абелевых полугрупп и гомоморфизмов могут быть представлены в виде hom -функторов по модулю некоторого специального отношения гомотопности, определяемого некоторым функтором из категории C^* -алгебр и $*$ -гомоморфизмов в категорию C^* -алгебр и сюръективных $*$ -гомоморфизмов. Опишем данную конструкцию. Пусть A, B – C^* -алгебры, B стабильна. Мы будем говорить, что $*$ -гомоморфизмы $\varphi_0, \varphi_1 : A \rightarrow FB$ F -гомотопны (и писать $\varphi_0 \simeq_F \varphi_1$), если существует $*$ -гомоморфизм $\Phi : A \rightarrow FIB$, такой что $F\text{ev}_{0,1} \circ \Phi = \varphi_{0,1}$ (F можно применять к отображению $\text{ev}_t : IB \rightarrow B$ вычисления в точке t , так как оно сюръективно). Отношение F -гомотопности вообще говоря не обязано быть отношением эквивалентности, но в некоторых описанных ниже случаях это условие выполнено. Для таких F мы обозначим $[A, B]_F = \text{hom}(A, FB) / \simeq_F$. Приведем некоторые конкретные примеры данной конструкции:

- $K(B) = [\mathbb{C}, B]_{Id}$ (см. например [1]);
- $\text{Ext}(A, B) = [A, B]_Q$, где Q – обобщенная алгебра Калкина, [2];
- $E_0(A, B) = [S^2 A, B]_{\mathfrak{A}}$, где \mathfrak{A} – функтор асимптотической алгебры (см. например [1]); В [3] было доказано, что $E_1(A, B) = [A, B]_{\mathfrak{M}_{\mathbb{Z}}}$, где $\mathfrak{M}_{\mathbb{Z}}$ – эндифунктор, связанный с алгеброй PoU над метрическим пространством \mathbb{Z} с естественной метрикой.

Вопрос, касающийся обратимости элементов в соответствующих полугруппах представляет серьезный интерес. Так например обратимость расширений тесно связана с некоторыми фундаментальными понятиями теории C^* -алгебр. Например для ядерной A полугруппа $\text{Ext}(A, \mathbb{K})$ является группой. Изучается вопрос об обратимости в полугруппе $[A, B]_{\mathfrak{M}_X}$ для эндифунктора \mathfrak{M}_X – алгебры PoU над метрическим пространством X ограниченной геометрии. Формулируются условия на X , достаточные для гомотопической тривиальности и обратимости классов $*$ -гомоморфизмов из A в $\mathfrak{M}_X A$. В частности справедливы две следующие теоремы.

Источники и литература

- 1) В. Blackadar, *K-theory for operator algebras*, vol. 5. Cambridge University Press, 1998.
- 2) E. Guentner, N. Higson, and J. Trout, “Equivariant E-theory for C^* -algebras,” *Memoirs of the American Mathematical Society*, vol. 148, 11 2000.
- 3) Г. С. Макеев, “Еще одно описание функтора Конна-Хигсона,” *Математические заметки*, vol. 107, no. 3, 2020.
- 4) E. C. Lance, *Hilbert C^* -modules: a toolkit for operator algebraists*, vol. 210. Cambridge University Press, 1995.

- 5) R. G. Bartle and L. M. Graves, “Mappings between function spaces,” *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 72, no. 3, pp. 400–413, 1952.
- 6) A. Connes and N. Higson, “Déformations, morphismes asymptotiques et K-théorie bivariante,” *CR Acad. Sci. Paris Sér. I Math*, vol. 311, no. 2, pp. 101–106, 1990.